EXAMENSARBETE

Bevis i matematikundervisningen

En jämförelse av hur Pythagoras sats presenteras och används i Sverige och Ukraina

Olga Marklund Krasnolutska

Lärarexamen, grundnivå
Lärarexamen 270/300/330 hp

Luleå tekniska universitet
Institutionen för konst, kommunikation och lärande

LULEÅ TEKNISKA UNIVERSITET

LULEÅ
TEKNISKA
UNIVERSITET

Bevis i matematikundervisningen

En jämförelse av hur Pythagoras sats presenteras och används i Sverige och Ukraina

Olga Marklund Krasnolutska

VT 2011

Luleå tekniska universitet
Lärarutbildningen
Allmänt utbildningsområde C-nivå
Handledare: Anna Klisinska

Sammanfattning

Detta examensarbetes syfte är att jämföra svenska och ukrainska matematiklärares syn på bevis och användning av bevis, i matematikundervisningen. Den kvalitativa studien bygger på sex intervjuer varav fyra genomfördes i norra Sverige och två i sydvästra Ukraina. Vidare undersökte jag hur framställning av Pythagoras sats och bevis presenteras i svenska och ukrainska läroböcker, samt vilken roll bevisen spelar i matematiken. Till denna undersökning har jag valt olika bevismetoder som framkommer i svenska och i ukrainska läroböcker. Jag undersökte även svenska och ukrainska styrdokuments aspekter på matematiska bevis.

Resultatet av undersökningen visar att lärarna från båda länder har samma syn på bevis i matematikundervisningen, dock skiftar användningen av den i klassen markant mellan länderna. I Sverige framförs bevis ibland för eleverna, men i Ukraina är bevis ett måste vid varje nytt avsnitt. Däremot bevisas Pythagoras sats alltid för eleverna i båda länderna, fast bevis metoderna ligger på olika svårighetsnivå. Undersökning av böckerna och styrdokument visar att eleverna i Ukraina börjar arbeta med bevis mycket tidigare än eleverna i den svenska skolan.

Nyckelord: Bevis, bevisföring, matematik, bevis i matematikundervisningen, Pythagoras sats

Förord

Jag vill tacka min handledare Anna Klisinska för hennes hjälp och den tid hon gett mig. För hennes goda råd, reflektioner och tips i mitt arbete. Samtidigt vill jag tacka alla som har bidragit med reflektioner och förslag på relevant litteratur till mitt examensarbete. Jag får inte glömma tacka alla deltagande lärare som har ställt upp på intervjuerna, utan dem hade det varit omöjligt att genomföra detta arbete.

Innehållsförteckning

Inledning

Efter många år av studier kan många av oss ställa frågan: "Vilken roll spelar bevis i matematikundervisningen? Kan bra beviskunskaper påverka övriga inlärningen i matematik?" Enligt min egen erfarenhet tycker jag att beviskunskaper aldrig kan försämra övrig förståelse av användning till exempel av formler, påståenden och sats. Däremot ökar det förståelsen för och breddar kunskaperna i ämnet.

Själv har jag andra erfarenheter av skolans matematikundervisning, eftersom jag inte har svensk bakgrund. Jag tycker att matematikundervisningen i svensk skola ligger på lite lägre nivå än min egen. Under mina studier i matematik på gymnasienivå i Sverige, förekom bevis av ett sats eller ett påstående någon enstaka gång. Jag har inte heller upplevt att det förekom något krav från lärare att eleverna själva skulle kunna bevisa teoremen, som däremot var vanligt under min studietid i Ukraina. Utifrån mitt uttalande om bevis i undervisningen vill jag inte antyda, att svenska elever har sämre matematiska kunskaper än ukrainska. Trots att utbildningskraven ligger på högre nivå, bevisar det inte att eleverna har bättre kunskaper.

Studierna på universitetet gett mig en bred bild om bevisens roll i matematikundervisningen. Kunskaper i bevis spelar en viktig roll för att öka förståelse och lärande i matematiken. Hanna (2000) menar att bevis är en viktig del av matematiken, och bör ha framträdande plats i matematikundervisningen. Däremot beskriver författaren att en av de viktigaste uppgifterna för matematiklärare är att förstå vilken roll bevis spelar i matematikundervisningen, för att öka dess användning i klassrummet. Vi måste diskutera bevisens funktion i matematiken och poängtera både dess betydelse och dess begränsning, därför att bevisen har en nyckelroll när det gäller att främja elevers matematiska förståelse. Det är en utmaning att hitta mer effektiva sätt att använda bevis för detta ändamål.

Jag tycker att förståelse för bevisframförande hjälper oss att fördjupa satsens eller formens framställning, tänka tydligare och mera effektivt, samtidigt som det vidgar våra kunskaper i det aktuella påstående. Därför anser jag att användning av bevis är en viktig del i matematikundervisningen, eftersom den leder till utveckling och erövring av nya färdigheter. Med hjälp av bevis kan vi få veta om våra antaganden är sanna. Det leder till att jag vill undersöka och få en bild av verksamma lärares attityd till bevis i matematikundervisningen.

Syfte och forskningsfrågor

Mitt övergripande syfte var att beskriva och jämföra den roll som bevis har i dagens matematikundervisning i två olika skolkulturer, Sverige och Ukraina. Vidare var mitt syfte att jämföra lärares inställning till bevis och bevisföring, samt läroböckernas likheter och olikheter i denna fråga, i de två utbildningssystemen.

Forskningsfrågor

- Hur ser lärare på bevis och bevisens roll i matematikundervisningen?
- Vilka likheter och olikheter i utformning av bevis, finns det i läroböcker i de två olika skolsystemen?

Bakgrund

Allmän information om två länder

Ukraina är ett av Europas största länder, med en yta på 603 700 km^2 och med 45 400 000 invånare. Där bor olika folkgrupper: ukrainare 78 %, ryssar 17 %, judar, vitryssar, moldavier, rumäner, polacker, bulgarer, greker, ungrare, tatarer med flera, enligt utrikespolitiska institutets hemsida, den 23 mars 2011. Kiev är Ukrainas huvudstad. Den största delen av befolkningen som är ortodoxa kristna; finns många katoliker, samt en mindre andel judar och muslimer. Ukrainska är ett officiellt språk; dock talar många bara ryska. 99,7% av ukrainska befolkningen är läs och skrivkunniga. Ukraina har nioårig skolplikt, men de som vill vidareutbilda sig måste ha elvaårig skolgång.

Sverige är 450 295 km^2 till ytan. Folkmängden är 9, 3 miljoner invånare, med olika folkgrupper: 81 % svenskar övriga 19 % är bland annat finländare, irakier, danskar, norrmän med flera, enligt utrikespolitiska institutets hemsida, den 23 mars 2011. Det officiella språket är svenska, men det finns minoritetsspråk, exempelvis samiska, finska, tornedalsfinska, romani, jiddisch m.fl. 71 % av befolkningen tillhör evangelisk-lutherska kyrkan; övriga är bl. a katoliker, ortodoxa kristna, muslimska församlingar m.fl. Läs och skrivkunnighet ligger i Sverige på 100 %.

Utbildningssystem i Sverige

Enligt informationen på Skolverkets hemsida (2011a) erbjuds den obligatoriska grundskolan för barn mellan 7 och 16 år i Sverige. Detta innebär att barnen har 9-årig skolplikt. Den obligatoriska 9-åriga skolutbildningen bedrivs i olika skolformer:

- grundskola
- fristående skola
- specialskola
- särskola
- sameskola

Den frivilliga tre åriga utbildningen bedrivs av:

- gymnasieskola
- fristående gymnasieskola
- gymnasiesärskolan

Alla elever har rätt till 3- årig frivillig gymnasieutbildning efter avslutad grundskola. Utbildningen på gymnasieskolan ger grundläggande kunskaper för vidare studier, och för ett framtida samhälls- och yrkesliv. Gymnasieskolan tillhandahåller 17 nationella program, som pågår under 3 år (Skolverket, 2011c). Innehållet på de nationella programmen är indelade i obligatoriska kurser, kärnämnen, individuella val samt valbara kurser och projektarbete.

Från 1 juli 2011 sker många förändringar inom gymnasieskolan. GY2011 (Ny gymnasiereform från höstterminen 2011) har sin bakgrund i regeringens proposition om högre krav och kvalitet i nya gymnasieskolan. Det ska finnas 18 nationella program - sex högskoleförberedande program och tolv yrkesprogram - som ska leda längre in i fråga om kunskap och kvalitet. Här ska eleverna kunna få en yrkesexamen eller en högskoleförberedande examen. Dock ska alla elever i yrkesprogrammen ha rätt att läsa in de kurser, som krävs för grundläggande behörighet till högskolan, dvs. ett yrkesprogram samt godkända betyg i Engelska 6 och Svenska, alternativt Svenska som andraspråk, 2 och 3.
I GY2011 kommer det att finnas nio gymnasiegemensamma ämnen: engelska, svenska, svenska som andraspråk, historia, idrott och hälsa, naturkunskap, matematik, samhällskunskap och religionskunskap. Idag läser alla elever samma kärnämnen i samma omfattning, men i den nya gymnasieskolan kommer omfattningen av ämnena att variera, beroende på vilket program eleverna studerar (ibid.).

Idag får eleverna betyg i varje ämne efter årskurs 8. Det nuvarande betygssystemet, som används fram till slutet av vårterminen 2011, har betygsnivåerna: G – godkänt, VG – väl godkänd och MVG – mycket väl godkänt.
Med den nya utbildningsreformen från höstterminen 2012, ska betygen införas från årskurs 6. Den nya lagen träder i kraft 1 juli 2011 och kommer att användas i utbildningar, som startar 2012. Detta innebär att alla elever i grundskolan och sameskolan får betyg vid varje terminsslut i alla ämnen, utom språkval. I specialskolan kommer betyget att sättas från höstterminen i årskurs 7. I ämnet språkval sätts betyg från årskurs 7 i grundskolan, och från årskurs 8 i specialskolan (Skolverket, 2011c).
Samtidigt införs en ny betygsskala från och med juli 2011. Den innehåller beteckningar från A till F. Betyget E, C och A är relaterade till det centrala innehållet i respektive kurs, där det beskrivs vad varje elev skall göra och med vilken kvalité, för att uppnå ett visst betyg. Betygen B och D speglar elevernas kunskapsutveckling på väg till nästa steg. Detta innebär att till exempel eleven uppfyller kunskapskraven för betyg C och övervägande del kunskapskraven för A, eleven får betyget B. Detta innebär att kunskapskraven inte formuleras för betyget D och B, de betygen styrs av kunskapskrav som är formulerade för E, C och A (Skolverket, 2011e).

Utbildningssystem i Ukraina

År 1991 blev Ukraina ett självständigt land. Det ledde till att ukrainsk litteratur och historia getts framträdande plats i undervisningen från 1992. Under tiden när Ukraina tillhörde Sovjetunionen, fick mer än hälften av eleverna sin undervisning på ryska. Efter landets självständighet, steg undervisningen på ukrainska till 78 % år 2001. Landets mål är att alla elever ska få möjlighet till undervisning på ukrainska. Det finns fortfarande många skolor där undervisningen sker på ryska. Det finns också skolor med undervisning på rumänska, polska och ungerska.

Enligt Utbildningsdepartementet (Міністерство освіти і науки України, 2011) sedan 1990 omfattar den ukrainska grundskolans utbildning 11 år. Dessförinnan var skolgången tioårig. Barnen börjar skolan vid sex eller sju års ålder, beroende på när de är födda. Den elvaåriga skolan består av tre steg (ступені):

Första steget: grundskolans steg 1 (початкова школа) - omfattar de första fyra åren av barnens utbildning. Här börjar barnen, som har fyllt 6 år innan den första september (Utbildningsdepartementet, 2011d).

Andra steget: grundskolans steg 2 (основна школа) - omfattar fem år till av barnens utbildning, från årskurs 5 till 9. Här får barnen den grundläggande utbildning, som ligger till grund för den omfattande utbildningen (дає базову загальну середню освіту, що є фундаментом загальноосвітньої підготовки всіх школярів, формує в них готовність до вибору і реалізації форми подальшого одержання освіти і профілю навчання) (ibid.).

Tredje steget: grundskolan steg 3 eller gymnasieskolan (старша школа) – omfattar två års studier från, årskurs 10 till 11. Det är det sista steget i utbildningen och motsvarar fullständig gymnasieutbildning i den svenska skolan (є останнім етапом одержання повної загальної середньої освіти) (ibid.).

Skolutbildningen bedrivs i olika skolformer. De skolformer som omfattar alla de ovanstående tre stegen (ступені):

- grundskolor
- specialskolor
- särskolor

Utöver de skolformer, som nämns ovan, finns skolor som omfattar endast det sista tredje steget (ступені):

- kollegium
- lyceer

Den sista skolformen, som omfattar delvis den andra steget (årskurs 7-9) och tredje steget (10-11) och endast tredje steget (ступені):

- gymnasiet

De flesta skolor i Ukraina är statliga. Dock förekommer privata skolor, varav några har religiös inriktning. Skolformerna som ägs av staten, är avgiftsfria. Grundskolans första nio år, består av obligatoriskt skolväsende för alla barn, och två år av frivillig skolgång. Enligt utbildningsdepartementet i Ukraina (МОН України) har det från våren 2008, införts klasser eller grupper med specialiserad inriktning och fördjupning i visa ämnen, till exempel matematik, språk, litteratur, fysik, biologi och kemi. Införandet av inriktningar kom för att ge elever möjlighet att fördjupa och utveckla sina färdigheter och talanger. De olika inriktningarna delas upp beroende på elevernas behov och önskemål, i samråd med föräldrarna, undervisande lärare och rektor. De olika inriktningarna eller fördjupningarna (поглибленим вивченням предметів) uppdelas på grundskolan i de två sista åren på högstadiet, 8-9 året och gymnasiet (формуються у складі загальноосвітніх навчальних закладів II ступеню 8-9 кл., та III ступеню, 10-11 кл.). Läroplan för grundskolans 11 åriga utbildning, (Типові навчальні плани загальноосвітніх навчальних закладів) ligger till grund för utformning av läroplaner för de olika fördjupningsområdena i utbildningen. I ämneskursplanerna beskrivs exakt hur många undervisningstimmar ett visst moment skall erbjuda i varje ämne, och vilka kunskaper eleverna skall behärska efter ett avslutat moment (Utbildningsdepartementet, 2011a, d).

Efter de obligatoriska skolåren, kan eleverna välja att studera vidare tre år till på gymnasiet, grundskola, lyceer eller yrkesskola. På de flesta yrkesskolor ingår allmänna kurser från grundskolans 10-11årskurs. Dock förekommer att skolorna inte erbjuder den allmänna utbildningen. Istället har många av yrkesskolorna kvällskurser, som erbjuds de elever, som oberoende av yrkesutbildningen vill ha de allmänna behörigheterna till studier på högre nivå, universitet eller högskola. I alla utbildningssystem, och efter varje avslutat år, får eleverna betyg i de ämnen som de har undervisats i. Eleverna kan erhålla betyg från 1 till 12 (ibid.).

Enligt Utrikespolitiska institut (2011) har Ukraina tio universitet, samt över hundra högskolor. Alla universitet i landet ägdes tidigare av staten men år 1992 inleddes undervisning vid det första privata universitetet i Ukraina, Kiev-Mohyla-akademin.

Kursplaner och läroplaner i matematik i svenska skolan

Enligt Kursplan i matematik för grundskolan (Lgr 11): *Matematik är till sin art en kreativ, reflekterande och problemlösande aktivitet som är nära kopplad till den samhälleliga, sociala och tekniska utvecklingen. Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser* (s. 31).

Syftet med matematiken är att utveckla matematiska kunskaper och matematisk användning i vardagslivet, ge möjlighet att uppleva estetiska värden i möten med matematiska mönster, former och samband. Eleverna skall kunna formulera och lösa matematiska problem och kunna använda lämpliga metoder vid problemlösning. Utbildningen syftar till att utveckla elevernas intresse för matematiken och tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang, reflektera över matematikens betydelse i vardagslivet och se matematikens användning och begränsning i den (ibid.).

Enligt informationen på Skolverkets hemsida (2011b) är matematiken en viktig del av vår kultur. Utbildningen i matematik ska ge inblick i ämnets historiska utveckling och visa vilken betydelse och roll det har i samhället. Syftet med utbildningen i matematik är att:

- *kunna tolka och använda det ökande flödet av information och för att kunna följa och delta i beslutsprocesser i samhället*
- *utveckla elevernas intresse i matematik och ge möjlighet att upptäcka estetiska värden i matematiska mönster och att kunna förstå och lösa problem*
- *utbildningen ge en god grund för studier i andra ämnen, fortsatt utbildning och ett livslångt lärande* (ibid.).

Utbildningen i matematik på grundskolan syftar till att utveckla intresse för matematik, och ge möjligheten att kommunicera med matematiskt språk och uttrycksformer.

På Skolverket hemsida (2011d) står skrivet att utbildningen i matematik i gymnasieskolan syftar på att ge kunskaper i matematik för studier inom vald studieinriktning, och för fortsatta studier. Undervisningen ska ge möjlighet att:

> *Eleverna skall uppleva glädjen i att utveckla sin matematiska kreativitet och förmåga att lösa problem samt få erfara något av matematikens skönhet och logik* (ibid.).

Under utbildningens gång skall eleverna lära sig att tänka matematiskt och använda matematiken i olika situationer, utveckla förmåga att tolka, formulera och använda matematiskt språk, symboler metoder begrepp och uttrycksformer och med hjälp av matematik lösa olika problem mm (ibid.).

I den nya kursplanen i matematik, som kommer att gälla från 1 juli 2011, framgår att syfte med ämnet är:

Eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt - utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder, samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer (Skolverket, 2010 sid 87)

Enligt information på Skolverket hemsida (2011d), tillhör användning av matematiska modeller, kommunikation, problemlösning och matematikens idéhistoria till de fyra viktiga aspekter som genomsyrar matematik undervisningen. Matematik i gymnasieskolan är uppbyggd i flera olika områden. Vissa av områdena behandlas redan i grundskolans matematik undervisningen, och fördjupas därefter i gymnasieskolan. Områden i ämnet omfattas av algebra, geometri, aritmetik, statistik, funktionslära, trigonometri, sannolikhetslära samt differential- och integralkalkyl med differentialekvationer. Matematik på gymnasieskolan innehåller fram till juli 2011, sju kurser som bygger på varandra. Det är Matematik A-E samt Diskretmatematik och Matematik breddning. Från 1 juli 2011 kommer matematik delas i Matematik 1-5 och Matematik specialisering samt att Matematik 1-3 delas i a, b, c kurser.

Kursplaner och läroplaner i matematik i ukrainska skolan

Matematiken är ett viktigt ämne för att lära sig om andra kunskapsområden (Utbildningsdepartementet, 2011). En viktig sida av matematikundervisningen är att eleverna ska kunna förstå matematikens roll i vardagslivet, för att kunna uttrycka sig matematiskt och kunna använda sig av den i praktiska sammanhang. Läroplanen definierar övergripande mål för matematik och några av dem är formulerade på följande sätt:

- *erövra matematiska kunskaper och utveckla sina matematiska färdigheter som ligger till grund för att bemästra andra skolämnen och matematiska kunskaper som är nödvändiga i vardagslivet* (Utbildningsdepartementet, 2011a, s.2).

- *utveckla sin logiskt och kritisk tänkande, minne, uppmärksamhet, intuition, förmåga att analysera och generalisera* (Utbildningsdepartementet, 2011a, s.2).

I läroplanen står bland annat, att en viktig roll för lärande i matematik, spelar dess användning av matematikens historia. Den ökar intresset för att studera matematik, stimulerar lusten till vetenskapligt utveckling och väcker ett kritiskt förhållandesätt till fakta. Dessutom ger matematikhistorien eleverna en uppfattning om matematiken, som en integrerad del av mänskligt kultur. Matematiken skall visa för eleverna hur matematiska begrepp, metoder och teorier har utvecklats igenom tiden. Eleverna skall bekanta sig med namn och biografier om berömda vetenskapsmän, som skapade matematiken - inklusive de berömda ukrainska matematikerna - för att underlätta på den nationella utbildningens nivå (Utbildningsdepartementet, 2011a).

Undervisning i matematik är utlagd på fyra timmar varje vecka, för årskurs 5 - 9. Däremot från årskurs 7 delas matematiken i två grenar, som algebra och geometri. I årskurs 7 har första halvåret 3 undervisnings timmar i algebra och 1 undervisningstimme i geometri. Det andra halvåret för årskurs 7 sker undervisningen likvärdigt 2 undervisningstimmar, både för algebra och för geometri. I årskurs 8-9 har eleverna 2 undervisningstimmar i algebra och geometri. I årskurserna 8-9 erbjuds de elever, som läser fördjupning inom matematik 8 undervisningstimmar per vecka - 3 timmar geometri och 5 timmar algebra. I årskurserna 10-11 erbjuds eleverna till de naturvetenskapliga inriktningarna 4 - 7 timmar per vecka, och på den allmänna inriktningen erbjuds 2 timmar per vecka (Utbildningsdepartementet, 2011a, b). Vidare finns exakt förslag i algebra och geometri för årskurs 7-11, som beskriver undervisningstimmar per delmoment (Utbildningsdepartementet, 2011c s.31-36).

Matematiska bevis i svenska kursplaner på gymnasiet

Kursplanerna i matematik beskriver de mål som eleverna skall ha uppnått efter varje avslutat kurs, samt betygskriterierna för alla nivåer: Godkänt (G), Väl godkänt (VG) och Mycket väl godkänt (MVG). Eftersom bevis och bevisföring har en central betydelse för matematiken, nämns bevis i styrdokumenten. Den nu gällande kursplanen för Matematik B (Skolverket, 2011d) beskriver generellt att eleverna ska erövra de grundläggande kunskaper och metoder som ingår i tidigare kurser, samt behärska nödvändiga problemlösningsmetoder för vald studieinriktning. Vidare beskrivs att i matematikundervisningen skall eleverna lära sig inte endast formella bevis av viktiga satser, utan också kunna resonera kring olika matematiska frågeställningar, samt förklara dessas betydelse vid problemlösning. Bevis nämns också i betygskriterierna; till exempel för att kunna uppnå betygskriterierna (MVG) krävs att eleverna kan använda och bevisa matematiska bevis, både skriftligt och muntligt (ibid.).

Ämnesplanerna för matematikämnet i den nya skolreformen anger tydligare vad som skall behandlas i de olika matematikkurserna. Ordet *bevis* och *användning av bevis* i förekommer i många sammanhang och visar tydligt vilka bevis som skall behandlas under matematikkursen. Elever, som läser Matematik 1b och 1c för de ekonomiska, estetiska, humanistiska och samhällsvetenskapliga programmen, skall bland annat kunna illustrera bevis av Pythagoras sats och triangelns vinkelsumma. Undervisning i matematik 2b och 2c ska ge kunskaper i grundläggande klasiska satser. Ett annat viktigt begrepp, som behandlas i Matematik 3c för den naturvetenskaps- och teknikprogrammet, är att eleverna ska kunna bevisa trigonometriska satser samt använda bevis vid problemlösning (Skolverket, 2010).

Matematiska bevis i ukrainska kursplaner på gymnasiet och grundskolan

Kursplanerna i matematik, algebra och geometri i Ukraina för grundskolan och gymnasieskolan, beskriver generella mål som varje elev skall uppnå vid kursens slut. Det finns noggrant beskrivna mål på momentnivå, dock utan betygskriterier (Utbildningsdepartementet, 2011 (b)). Undervisningen i matematik präglas av bevis, därför att bevis och bevisföring har en central roll i undervisningen och i kursplanerna. Enligt de generella målen skall eleverna kunna formulera viktiga satser, som ligger till grund för vidare studier med hjälp av bevis och kunna analysera, problematisera och föra matematiska resonemang, samt använda bevis vid problemlösning.

Kursplanen på momentnivå beskriver tydligt vilka bevis som skall ingå i olika kurser och moment. Till exempel beskrivs i kursplanen för årskurs 8, att eleverna skall kunna använda och formulera bevis av olika satser som ligger till grund i matematikundervisningen. Eleverna ska kunna bevis av Pythagoras sats, samt omvändning av Pythagoras sats (Доводить теореми: Піфагора -Теорема, обернена до теореми Піфагора). De skall kunna bevisa formel för andragradsekvation, samt bevisa Viétas sats, bevisa och förklara formeln för areaberäkning med mera. För årskurs 9 gäller att eleverna ska kunna bevisa definitioner av trigonometriska formler, avståndsformeln mellan två punkter med mera.

Bevis i matematikens historiska utveckling

Dahl (2002) beskriver att *matematik betyder kunskap och kommer från det grekiska ordet "mathesis"* (ibid. s.31), men matematiken tar sin början långt innan antikens greker. Äldsta matematiken utvecklades av praktiska behov, till exempel geometris uppkomst kan hänvisas till åkerbruket eftersom uppstod efterfråga att mäta sina åkrar eller egendomen. Från Mesopotamien och Egypten kommer de första skriftliga bevisen på matematikens utveckling. Första städerna uppstod runt de stora floderna i dessa områden, vars sumerer (första mesopotamiska kulturfolken) byggde bevattningskanalerna i några av områdena. Deras bygganläggningar fullgjorde sin funktion ungefär i 4000 år. En av kanalerna som byggdes vid floden Nilen uppfyller sin funktion än idag fast med förbättrat teknik. Den kunskapen som användes för att bygga kanalerna hjälpte till att utveckla geometri (ibid.).

En så kallad Pythagoras sats var känd av babylonierna mer än ett tusen år innan Pythagoras, och kunde lösa första-, andra- och en del av tredjegradsekvationer. Vetenskapliga resultat spred sig genom att grekerna hade handelsförbindelser med babylonier och egyptier.
Thales (köpman, matematiker och astronom) från Miletos, som blev känd genom att förutse solförmörkelsen den 28 maj år 585 f. Kr., har bevisat många geometriska satser. Författare beskriver att Thales var den första matematiker som brydde sig om varför en sats är sann, och inte endast eftersträvade att förstå på vilken sätt man beräknar eller konstruerar något med hjälp av den. Thales ger geometrin en ny karaktär genom att introducera den logiska bevismetoden. Dessförinnan byggdes bevismetoden på experiment och var osystematisk (Dahl, 2002).

Liksom Thales gjorde Pythagoras också många långa resor och tog med sig en del av vetenskapen. Efter många resor stannar han i Syditalien och grundade där den pythagoreiska skolan. Pythagoras är en legend, som gjorde de geometriska bevis av Pythagoras sats, som finns i Euklides "Elementa". Hans skrifter publicerades långt senare av andra vetenskapsmän. Pythagoras egna skrifter har inte bevarats (ibid.). Pythagoras sats kommer jag att behandla i senare avsnitt.
Härifrån kan vi se att matematiken har sina rötter lång tillbaka i tiden. Till matematikens framgång och utveckling har många människor runt om i världen bidragit.

Definition av bevis

Begreppet "*matematiskt bevis*" är mångfasetterat och svårt att definiera (Hemi, 2009). Synen på bevis har ändrats genom tiderna, och många filosofiska skolor har splittrad syn på vad som ska godtas, som ett giltigt bevis. Många matematiker i forskningsstudier från 2003 talar om bevis, som en väsentlig del av matematiken: *Den är ju matematikens själ* (ibid. s.94).

Klisinska (2009) beskriver bevis på flera olika sätt. Inom matematiken är bevis övertygelsen att matematiska uttalanden, som nödvändigtvis är sant inom ett bestämt område, eller:

> *Proof a chain of reasoning using rules of inference, ultimately based on a set of axioms that lead to a conclusion*. (Klisinska, 2009 s.3)

Ordet *bevis* innebär ett rad begrepp med övertygande förklaringar, som inom matematiken visar att ett påstående är sant eller falskt, beroende på vad som efterfrågas. Matematiken genomsyras av mängder av bevis. Nya resultat som kommer fram måste kunna bevisas, för att det skall räknas som sant. Ett påstående som antas vara sant men som dock inte är bevisat, kallas för förmodan, eller en gissning, medan bevisat påstående kallas för *lemma* eller *sats*. (Wikipedia, den 3 februari 2011).

Bevis är grund för visshet om något (Nationalencyklopedin, 1990 s.507). Enligt Nationalencyklopedin ger bevis kunskap om riktigheten eller sanningen hos ett påstående. Det matematiska beviset består av ett antal ordnade påståenden, som i vanliga fall är deduktivt (ett antagande eller påstående som med hjälp av en framställt metod bevisar det), eller beviset blir deduktivt om det skrivs ut fullständigt (ibid.). Enligt ”Bra böckers lexikon” (1991) är bevis en metod, som fastställer sanningen eller sannolikheten för sanningen, av ett påstående eller antagande.

Enligt “Encyclopaedia of mathematics” (1991) bevis är ett resonemang, som är baserat på ett påstående/antagandet och har som syfte att med hjälp av specifika regler visa sanningen i ett uttalande eller en sats. Bevis är sätt att motivera giltigheten av givna påståenden.

Bevis kan spela flera olika roller. Det kan t.ex. fungera som validering, som kan leda till nya upptäckter, diskussioner och kan eliminera felaktigheter (Hanna, 1994). Inom matematiken är bevis en övertygande demonstration av några sanna matematiska uttalanden, inom godtagbara normer för området. Ett bevis är ett logiskt argument och inte empiriskt. Detta betyder att bevis måste visa att påståendet som berörs är sant, utan undantag. (Klisinska, 2009).

Funktioner av bevis

Hanna (2000) menar att beviset hjälper till att förstå innebörden av satsen, som skall bevisas. Det skall inte bara visa att påståendet är sant - utan också förklara varför det är sant. Själva beviset kan leda till många förändringar och förbättringar av definitioner, och ge systematisering av resultatet eller en formalisering av mängd matematiska kunskaper. Författaren ger antal förklaringar om bevisens funktion inom matematiken:

- Verifikation - sysslar med sanningen i ett uttalande
- Förklaring – som ger insikt i varför det är sant
- Systematisering – organisation av olika resultatet i ett deduktivt system av axiom, begrepp och satser
- Upptäckt – en upptäckt eller uppfinning av nya resultat
- Kommunikation – överföring av matematiska kunskaper
- Byggandet av en empirisk teori
- Undersökning av innebörden av en definition, eller konsekvenserna av en antagande

- Införande av ett välkänt faktum i ett nytt ramavtal, och därmed synvinklar ur ett nytt perspektiv

Reuterswärd (2008) och Essman & Wistrand (2009) beskriver forskarnas syn på bevis, och framställer att bevisens grundläggande funktion är att verifiera ett påståendes sanningshalt. Bevis är ett oersättligt verktyg då man med hjälp av denna funktion kan övertyga sig om sanningshalten i tveksamma satser (Reuterswärd, 2008). Klisinska (2009) beskriver, att ett bevis i matematik syftar på att verifiera eller motivera ett uttalande, om ett antagande eller resultat. Detta ”validation function” ses, som en av den viktigaste funktionen i matematiska bevis. Vidare framställer hon, att bevisens roll i matematiken inte endast är att verifiera eller kontrollera ett resultat, utan också kunna förklara eller ge en inblick i varför det är sant. Med hjälp av den förklarande funktionen, utgör bevis ett viktigt forum för utbyte av idéer inom matematiken (Reuterswärd, 2008). Essman & Wistrand (2009) beskriver att förklaring är en av de viktiga funktionerna bevisen kan ha eftersom den ger förklaring till varför något är sant.

En bra resurs att kommunicera matematisk, är att ge klara mönster och fullständiga redogörelse av hypotes och strängt klara argument. Denna kommunikativa funktion syns mer tydligt när vi betraktar bevis, som något socialt som ombildas, graderas och blir förstått i praktisk förbindelse (Reuterswärd, 2008). I studie beskrivs att *ett av bevisens styrkor är, att fastställa logiska samband mellan matematiska samband, och därigenom systematisera den matematiska vetenskapen* (ibid. s.9). Vidare betonas, att denna systematisering ger möjlighet att träffa på bristande konsekvenser eller cirkelresonemang, och ger ett perspektiv på den matematiska teorins axiomatiska mönster. Dock kan beviset också medföra att förut okända resultat upptäcks. Den rent deduktiva strukturen av ett bevis, väcks till liv från följdsatser eller andra svar, som framkommer från många exempel (Reuterswärd, 2008). Empirisk teori är en teori inom ett vetenskapligt område, där hypoteser grundas på erfarenhetsmässiga fakta. Klisinska (2009) diskuterar Newtons bevis på Kepler lagar, och betraktar Euklidisk geometri som ett exempel på matematisk empirisk teori.

Bevisens roll i undervisningen

Många författare, som t ex Hersh (1997) och Hanna (1995), har uppfattningen att bevis och bevisföring har olika roller eller funktioner i matematiken som vetenskap, jämfört med matematiken som skolämne. Hersh (1997) säger att bevisens roll i klassrummet, inte är detsamma som inom matematiken, som vetenskap. I forskning har bevis uppgiften att övertyga varför ett visst påstående är sant, men i klassrummet är det lätt att övertyga elever. Eleverna behöver bevis för att förklara, ge insikt varför ett teorem är sant - inte av betydelse i formell logik. I klassrummet presenteras olika informella och semiformella bevis med det naturliga språket, som omfattar beräkningar. Bevis är en fullständig förklaring. Den visar när en fullständig förklaring är lämplig, snarare än ofullständig förklaring eller ingen förklaring alls. Syftet med bevis i undervisningen, och med själva undervisningen, är att ge förståelse. *Whether to give a proof as is, elaborate it, or abbreviate it, depends on what he thinks will increase the students understanding of concepts, methods and applications* (ibid. s. 60).

Tanken med bevis och bevisföring i en lärsituation, är att bevis fungerar som ett verktyg för lärare och elever - och inte ett hinder, som begränsar bevisföringen/beviset. I undervisningen av framtida matematiker är bevis ett verktyg i forskningens tjänst, och inte ett hinder för matematikers uppfinningsförmåga. *Proof can convince, and it can explain. In research,* *convincing is primary. In high-school or undergraduate class, explaining is primary* (Hersh, 1998 s. 61).

Hanna (1995) betonar att vi först måste förstå bevisens roll i själva matematiken, för att kunna förstå den funktion bevis har i matematikundervisningen. Den huvudsakliga rollen av bevis i matematiken, är motivering och kontroll. Matematiker ser mer på bevis än bara motivering. Författaren beskriver, att bevis hjälper oss att bli klokare och det bästa med bevis, är att den hjälper oss att förstå innebörden av den sats, som bevisas; inte endast att den är sann utan också varför den är sann. Det matematiska beviset är mer övertygande och leder till ytterligare upptäckter inom ämnet. I matematikundervisningen är bevisens roll att motivera och kontrollera, liksom det är naturligt att se på bevis i undervisningen som en förklaring (Hanna, 1995, 2000). När eleven kommer i kontakt med matematikens värld, börjar de med de grundläggande funktionerna av beviset så som kontroll och förklaring. I klassrummet är bevisens roll att ge svar på varför ett viss påstående är sant (Hanna, 2000).

Undervisningen i matematik består av att lära sig genomföra konkreta logiska resonemang. Enligt Gennow & Wallby (2010) är det svårt att följa ett fullständigt logiskt resonemang, utan bevis. Vidare beskriver författarna att i matematikundervisningen bevis oftast inte uppfyller kraven att vara fullständiga, eftersom bevis presenteras utan alla ingående element. Istället är ett matematiskt bevis en dialog mellan två personer, den som presenterar ett bevis och en tänkbar läsare. Bevisens presentation ska vara så detaljerad att den tänkbare läsaren ska kunna fylla i detaljerna, och beviset skulle bli ett fullständigt logisk argument. Men beviset får inte vara så detaljerat att den person som läser beviset distraheras. Ju högre nivå läsaren befinner sig på, desto mer komplicerad är processen/bevisföringen (ibid.).

Bevis, enligt Hemmi (2006, 2009), är en viktig fråga inom matematikdidaktiken idag, med stor variation av betydelser och användning av matematiska bevis, i de situationerna där matematiken förekommer. Många matematikdidaktiska studier har fokuserat på och diskuterat, olika funktioner och betydelser av bevis. Hon beskriver att bevis förmedlar matematisk kunskap. Bevis stabiliserar matematik i praktiken, genom att ge gemensamma kriterier, för att acceptera och ta fram ny matematisk kunskap. Bevis skapar gynnsammare förutsättningar mellan generationerna, med hjälp av systematisering av matematiska resultat i ett deduktivt system av axiom, definitioner och teorem. Detta underlättar för nya generationer att återta de kunskaper, som har erhållits via tidigare generationer. Matematiska bevis har gett möjligheten att skapa en mängd kunskaper, och är en kärna i matematiken, som är relativt stabil från generation till generation.

Läroböcker

Johansson (2006) beskriver i sin doktorsavhandling, att läroböckerna är väl utformade och avsedda för att användas i utbildningen; *"designed to provide an authoritative pedagogic version of an area of knowledge"*(s 6). Läroböckerna är en artefakt, som är utformad av en författare (eller flera författare) och en producent, som har avsikten att erbjuda en väl genomtänkt och välgjord pedagogisk version av ett skolämne. I de flesta länder publiceras böckerna av industrier. Det medför att de krafter som driver böckernas produktion, både är pedagogiska och ekonomiska.

Böckernas innehåll har en viss syn på lärande (Johansson, 2006). Någon av oss skulle kanske känna igen den behavioristiska synen i läroböcker, som fokuserar på att få ett rätt svar på en väl definierad fråga. Enligt det konstruktivistiska och sociokulturella synsättet, skulle det vara viktigare att böckernas innehåll utgår från elevernas erfarenheter, och skapa uppgifter som leder till samarbete mellan elevgrupper. Läroböckerna speglar även vissa traditioner, och landets pedagogiska filosofi. Svenska läroböcker i matematik är oftast utformade efter svårighetsgrad, som skulle ses som resultat av de reformer som skett under 1900-talet och som syftar till individanpassad undervisning. Den svårighet som finns i skolan är hur vi ska hantera elevgrupper, som ligger på olika utbildningsnivå, och hur var och en kan arbeta i sin egen takt. Med hjälp av läroböcker, som indelar uppgifter i olika svårighetsgrad, underlättas individuellt elevarbete. Därför ses läroböckerna som en lösning på ett problem, som dock inkluderar att utbildningen är beroende av läroböckerna i högsta grad, och förklarar varför många klassrumsarbeten består av 'silent calculation' i läroböckerna (ibid.).

Enligt Skolverket (2003) är matematik det ämne, som är mest beroende av lärobok både på gott och ont. Läroboken har en dominerande roll i matematikundervisningen, som påverkar elevernas lust och olust inför matematik lärandet. Undervisningen organiseras och styrs av boken i hög grad. I dagens skola är matematik det, som står i läroboken för både lärare och elever. Vidare beskrivs i rapporten att läroböckerna kan bidra till både positiv och negativ utveckling. Den positiva utvecklingen sker genom undervisningspraktiken, men den negativa bidrar till att en alltför ensidig användning av lärobok, leder till att eleverna blir ointresserade av ämnet i sig. Enligt rapporten är det många lärare som tycker att undervisningen i matematik är beroende av läroboken och att många elever är kritiska till detta. För bred användning av läromedel i matematikundervisningen begränsar en verklig bild av matematiken och detta leder till att lusten att lära matematik avtar hos eleverna. Dock ligger problemet inte i själva lärobokens användning, utan i *hur* och *varför* den används i matematikundervisningen. Från intervjusvaren i rapporten framkom två förhållandesätt på vad, som styr undervisningen i matematik. Det första är att *läromedel stå för måltolkning, arbetsmetoder och uppgiftsval, vilket är det i särklass vanligaste förhållningssättet i matematikämnet*. Det andra är att lärarna *utgå från kursplanens strävansmål och uppnåendemål och planera en variationsrik väg som leder fram mot målen med hjälp avolika slags läromedel och arbetssätt* (ibid. s. 39). Rapporten beskriver att genom att utgå från beskrivning av strävansmål och uppnåendemål i kursplanerna, kan elevernas och lärarens egen uppfinningsförmåga få större spelrum. Det ger fler möjligheter att hitta olika metoder och arbetsformer, för att eleverna ska få ett intressant och lustfyllt lärande. Från rapporten framgår också, att vi lärare själva skall tolka målen, för att kunna välja lämplig litteratur och arbetsformer, som uppfyller kraven för nationella mål och tillgodoser elevernas behov. Granskningen visar också att matematiken blir alltför ointressant för många elever på grund av den enskilda arbete i läroboken.

Metod

Datainsamlingsmetoder

För att kunna få en god inblick i inställningen till bevis och bevisföring i den svenska och ukrainska skolan, har jag valt att göra en kvalitativ studie, som handlar om hur lärare se på bevis och Pythagoras sats samt hur Pythagoras sats presenteras i olika läroböcker.

I min studie har jag valt att göra en kvalitativ undersökning med undervisande lärare på gymnasieskolan eller motsvarande. Syftet med kvalitativ forskning är att upptäcka och beskriva de fenomen, som finns inom det område man studerar (Stukát, 2005). Om man vill veta hur många, menar Trost (2007), att man ska göra en kvantitativ studie, men om man däremot vill förstå eller hitta mönster är den kvalitativa undersökningen mer passande. Eftersom min intention är, att få en ingående bild av hur bevisföring används i dagens skola, är det därför lämpligt att jag använder mig av en kvalitativ metod. För att kunna beskriva lärares inställning till bevisföring i matematikundervisningen, väljer jag att intervjua lärare. Det innebär, med andra ord, att jag använder mig av kvalitativa forskningsintervjuer. Syftet med denna typ av intervjuer är nämligen, att förstå ämnet från den levda vardagsvärlden ur de intervjuades egna perspektiv (Kvale & Brinkmann, 2009). Patel & Davidsson (2003) betraktar intervjun som en teknik för att samla information, som bygger på frågor. Intervjun kan genomföras via telefonsamtal, eller att intervjuaren personligen träffar den/de han/hon intervjuar. Fördelar med intervju inkluderar att frågeställningen kan förtydligas och utvecklas, utan att missförstånd uppstår. Nackdelen med den kan vara att intervjupersonen intar en försvarsattityd om personen upplever att intervjuaren dömer eller kritiserar uttalanden. När man intervjuar människor, är det är viktigt att tänka på hur man använder kroppsspråket och ansiktsmimik, för att undvika missförstånd. Med tanke på att jag ska undersöka lärares inställning till bevis och bevisföring, verkar den kvalitativa intervjun vara ett passande verktyg, för att jag ska ha möjlighet att upptäcka och identifiera intervjupersonernas inställning till/uppfattning om, bevisföring i matematikundervisningen generellt och Pythagoras sats i synnerhet.

Undersökningsgrupp

Undersökningen genomfördes under våren 2011. Min intervjugrupp består av fyra gymnasielärare, som undervisar på olika program och inriktningar i norra Sverige, och två årskurs 7-11 lärare i sydvästra Ukraina. Detta urval görs, eftersom jag ska verka som lärare i gymnasieskolan. Alla lärare som ingår i studien har akademisk utbildning. När jag redovisar mitt resultat från intervjuerna, använder jag fingerade namn för att intervjupersonerna inte ska kunna identifieras på något sätt. De svenska lärarna är:

- Ida: undervisar i matematik på praktiska program och har 3,5 års arbetslivserfarenhet;
- Stefan: undervisar i matematik och fysik på praktiska och teoretiska program och har 3,5 års arbetslivserfarenhet
- Kristina: undervisar i matematik och fysik på teoretiska program och har 10 års arbetslivserfarenhet;

- Maria: undervisar i matematik och språk på praktiska och teoretiska program samt vuxenutbildning och har 5,5 års arbetslivserfarenhet.

De ukrainska lärarna är:
- Julia: undervisar i matematik och har 29 års arbetslivserfarenhet;
- Vera: undervisar i matematik och fysik och har 14 års arbetslivserfarenhet.

Detta val av deltagarantal - fyra svenska lärare och två ukrainska lärare - tycker jag var lämpligt för att kunna genomföra min undersökning. Enligt Stukát (2005) och Trost (2010) kan antalet personer i undersökningen variera, beroende på vilken undersökning som genomförs. När en intervjuundersökning utförs, kräver den mycket arbete av intervjuaren. Tidsåtgången vid transkribering, upprepande genomläsningar och jämförelser mellan deltagandes svar är stor. Därför bör arbetstidsinsatsen sättas i relation till uppsatsens storlek och omfattning (ibid.). Jag tyckte att antalet deltagande var lämpligt för att kunna sammanställa och analysera deltagarnas svar, angående vilken roll bevis har i matematikundervisningen. Skillnaden mellan antal deltagarna från Sverige och Ukraina beror på, att intervjuerna med lärarna från Ukraina skedde med hjälp av telefon intervju (Skype). Dessutom var det svårt att få tag i verksamma lärare från Ukraina som har tillgång till dator och internet.

Material

För att genomföra min kvalitativ undersökning och för att ge en bild av hur ser lärare på bevis och bevisens roll i matematikundervisningen väljer jag att använda

- Intervjufrågorna (se bilaga 1- på svenska och bilaga 2- på ukrainska) har sammanställts, för att så brett som möjligt täcka in viktiga aspekter, som bevis har i matematikundervisningen.

För att ge en bild av hur Pythagoras sats presenteras i läroböcker, väljer jag att studera likheter och olikheter i

- Läroböcker, som de deltagande känner till och använder sig av i sin undervisning

Jag har valt att studera framställning av bevis, i följande svenska läroböcker: *Matematik 4000 Kurs A, Matematik 3000 Kurs B och Matematik för gymnasiet kurs B*

Jag har valt att studera framställning av bevis, i en ukrainsk lärobok: *Geometri. Årskurs 8.*

Detta val av läroböcker gör jag på grund av, att det förekommer tre olika bevis av Pythagoras sats i var och en av de svenska läroböckerna, och många olika metoder av bevis i den ukrainska läroboken.

Genomförande

I min undersökning använder jag mig av halvstrukturerade eller semistrukturerade intervjuer, enligt Stukát (2005). Denna metod av intervju använder jag på grund av möjligheten att få djupare eller fylligare information på frågorna, och kunna ställa följdfrågor till respondenterna vid behov.

Första kontakten med informanterna tog jag under den sista verksamhetsförlagda delen av utbildningen, samt gav information om vilket tema intervjun skulle komma att handla om. Dessutom förklarade jag att etiska principer skulle komma att följas i undersökningen. Lärarna blev nyfikna och tackade ja till att delta i undersökningen. Med informanterna från Ukraina skedde första kontakten när jag var på besök i Ukraina i decembr-januari, varvid jag frågade om de kunde ställa upp på en undersökning. Informanterna tackade ja till att delta i undersökningen. Det bestämdes att jag skulle kontakta dem via telefon, när undersökningstemat blev fastställt. Innan undersökningen genomfördes, fick alla lärare i förväg via mail ta del av intervjufrågorna (se Bilaga 1 och 2), för att få ut mer information och spara tid under intervjun. Detta genomfördes på grund av att deltagarna i undersökningen i förväg har bestämt om tillvägagångssättet, innan de tackade ”Ja” till undersökningen. Detta ledde till att deltagarna kände sig trygga under intervjun och var väl förbereda samt under själva intervjun kunde jag vid behov ställa följdfrågor.

Informanterna i undersökningen bestämde själva var och när intervjuerna skulle äga rum. Tre av intervjuerna i Sverige skedde på lärarnas arbetsplats. Intervjuerna med lärarna från Ukraina skedde hemma vid en förutbestämd tid, varvid kontakten skedde med hjälp av Skype. Intervjuerna genomfördes individuellt med var och en av informanterna, eftersom jag ville studera den enskilde lärarens uppfattning om bevisens roll i undervisningen. Gruppintervju skall, enligt Trost (2010), inte användas för att komma åt attityder eller åsikter, eftersom deltagarna kan samlas vid en annans åsikt utan att framföra egna. Varje intervju inleddes med en vardaglig diskussion, som gav till en bra stämning kring den. Informanternas svar registrerades/spelades in med hjälp av videokamera. Detta val gjordes på grund av att jag kunde koncentrera mig på själva intervjun, istället för att lägga stor vikt på anteckningar. Detta ledde till att frågorna diskuterades fritt under intervjun, utan att uppehåll för anteckningar behövdes ske. En av intervjuerna skedde via mail, samt att jag kontaktade läraren via telefon, när något var oklart eller en följdfråga behövdes ställas.

Bearbetning

Första steget i bearbetningen av materialet, var att anteckna det, som sägs av informanterna i undersökningen, på papper. Enligt Patel & Davidsson (2003) sker bearbetning av kvalitativ undersökning, genom att man först skriver ut var som sägs på ljudinspelningen, för att sedan sammanställa och hitta mönster i informanternas svar. Vidare påstår författarna att det är bra att göra löpande analys av direkt insamlat data, för att kunna identifiera ifall någon viktig information förbises, som kan berika undersökningen. Efter bearbetning eller transskribering av den första intervjun, upptäcktes att intervjufrågorna inte var fullständiga. Det saknades en fråga om bevis som ett viktigt verktyg i undervisningen, som utvecklar elevernas bättre förståelse och begreppsbildning i matematik (fråga 8, se bilaga 1 och 2). Jag kontaktade första informanten via mail och bad henne/honom besvara denna fråga.

Själva bearbetningen, analysen av intervjuerna, skedde när alla intervjuer var genomförda och transskriberade. Allt som sagts vid intervjuerna var antecknat på papper, därefter raderades upprepningar och irrelevant information för denna studie, samt att deltagarna i studien hade möjlighet att läsa genom mina tolkningar och kommentera dessa. Trost (2010) beskriver att när intervjuer är genomförda, skall man *bearbeta dem, analysera dem och tolka dem* (s.147). Vidare beskriver författaren, att de tre verktygen inte behöver komma efter varandra, eftersom de griper in i varandra. Redan vid själva intervjun sker delvis en automatisk analys och tolkning av frågor, och det händer inte mindre vid själva utskriften (ibid.). Intervjusvaren sammanställdes enligt frågornas utformning (se bilaga 1 och 2). Informanternas svar - utskrifter - lästes upprepande gånger, för att välja den del av materialet som bäst svarade mot studiens syfte.

Begränsning i undersökningen

För att kunna få en mer verklighetstrogen bild av bevis i de två länderna, begränsar jag min undersökning av läroböckerna till ett bevis, som är viktigt i båda skolsystemen: Pythagoras sats.

Bearbetning av läroböcker

Eftersom den kvalitativa studien begränsas genom att presentera mer utförligt bevis av Pythagoras sats, väljer jag också att presentera böckers upplägg av denna sats. Efterssom Johansson (2006) beskriver att läroböckerna är *"designed to provide an authoritative pedagogic version of an area of knowledge"*(s 6), väljer jag att undersöka skillnader och likheter i framställningen av bevis i denna sats. Denna undersökning sker genom att jag väljer de vanliga bevismetoder, som förekommer i båda ländernas matematikläroböcker. Detta val av alternativa läroböcker och läroböckernas presentation av Pythagoras sats, sker med hjälp av lärarnas rekommendationer från båda länder. Läroböckerna, som används i denna studie, är aktuella och används idag i undervisningen i Sverige respektive i Ukraina. För att underlätta för läsare att se skillnader och likheter i utformningen och presentation av detta bevis, väljer jag att översätta de olika bevismetoder, som förekommer i den ukrainska läroboken. Översättning sker av mig, varför eventuella mindre grammatiska fel kan finnas i den svenska översatta texten.

Validitet och reliabilitet

Stukát (2005) skriver att reliabilitet är kvalitet på själva mätinstrumentet - i detta fall kvalitativintervju. Patel och Davidsson (2003) beskriver reliabilitet som instrumentets tillförlitlighet, och handlar om hur väl instrumentet motstår slumpinflytanden av olika slag. Stukat (2005) skriver att det kan förekomma några reliabilitetsbrister i en undersökning. En av de många brister som kan förekomma under intervju, är att informanten tolkar en fråga fel eller att intervjuaren tolkar fel svar på en fråga. För att få bättre tillförlitlighet i undersökningen och undvika bristerna, kan man upprepa mätningen. Om en annan person genomför samma undersökning, så tror jag att denna skulle få ett annat resultat. Eftersom det i min undersökning ingick endast fyra lärare från Sverige och två från Ukraina, kommer jag att ge den bild av vad dessa anser om bevis i matematikundervisningen. Patel och Davidsson (2003) skriver att för att få en högre reliabilitet i undersökningen, kan informationen lagras genom inspelning av ljud eller bild och ljud, beroende vad som ska studeras. Detta kan åstadkommas genom att intervjuaren, i detta fall jag, tar svaren i repris, så många gånger det krävs, för att säkra att det svar jag fått har uppfattats korrekt.

Validitet är giltighet i undersökningen, och beskriver om vi mäter det som vi anser att mäta korrekt eller med andra ord, hur bra ett mätinstrument mäter det man avser att mäta (Stukát, 2005). Enligt Patel och Davidsson (2003) kopplas validiteten till hur forskaren i undersökningen lycka fånga eller skaffa underlag, för den studerades livsvärld. För att få ärliga svar under intervjuerna har jag garanterat deltagarna anonymitet samt att jag känner några av deltagarna sen tidigare ökar validiteten ytterligare.

Etiska principer

Informationskravet

Det är viktigt att den som ska intervjuas får information om undersökningens syfte, hur undersökningen kommer att gå till, vem som leder undersökningen, samt hur resultatet av undersökningen kommer att användas (Stukát, 2005). Det är viktigt att klargöra att deltagande i undersökningen är frivillig, och att den intervjuade personen får avbryta sin medverkan när som helst under pågående intervjun (Nyberg, 2000).

Samtyckekravet

Deltagarna i undersökningen har, enligt Stukát (2005), rätt att själva bestämma om de aktivt vill medverka eller inte. Deltagarna i undersökningen ska vara medvetna om, att de kan självständigt bestämma hur längre och på vilka villkor, undersökningen skall ske. De ska vara medvetna att de kan avbryta medverkan i undersökningen, utan att det ska medföra negativa följder för dem. Enligt Nyberg (2000) får det inte utövas påtryckningar på deltagaren eller någon sorts påverkan, för att tvinga uppgiftslämnaren att medverka i undersökningen.

Konfidentialitetskravet

Alla i undersökningsgruppen ska vara medvetna om, att all information kommer att användas anonymt, vilket innebär att det ska vara omöjligt att identifiera dem som har ställt upp på intervjun (Stukát, 2005). Det skall tydligt framgå, att ingen utom den intervjuansvarige kommer åt intervjumaterialet vid undersökningen. Och enligt författaren rekommenderas att deltagarna ska informeras om var undersökningsresultat kommer att publiceras, och om det är möjligt erbjuda information om resultatet eller visa rapport av undersökningen.

Nyttjandekravet

Enligt Stukat (2005) framgår, att ”Den information som samlats in får endast användas för forskningsändamål. Informationen får inte utnyttjas eller lämnas eller utlånas för kommersiellt bruk eller andra icke-vetenskapliga syften” (s. 132). All information som jag fått in kommer endast att behandlas i detta arbete och inte lämnas till någon utomstående.

Resultat

Intervju med svenska lärare

De intervjuade personerna är:

- Ida: undervisar i matematik på praktiska program, och har 3,5 års arbetslivserfarenhet;
- Stefan: undervisar i matematik och fysik på praktiska och teoretiska program och har 3,5 års arbetslivserfarenhet
- Kristina: undervisar i matematik och fysik på teoretiska program, och har 10 års arbetslivserfarenhet;
- Maria: undervisar i matematik och språk på praktiska och teoretiska program samt vuxenutbildning, och har 5,5 års arbetslivserfarenhet.

De fyra svenska lärarna i undersökningen uppfattar bevis, som ett logisk resonemanget som berikar vår förståelse för matematiska begrepp. Detta framkommer exempelvis i följande citat:

> *Bevis är en förklaring och ett logiskt resonemang, som man kan ta tag i olika satser och definitioner för att få djupare förståelse för olika begrepp inom matematiken, och att man sätter matematiken i ett sammanhang, och det blir ju viktigt för den begreppsliga förståelsen och som en del av att man kan lösa olika matematiska problem* (Ida).

En annan aspekt av bevis är att relatera till det som en utsaga på ett påstående, eller som en förklaring på en formel. När vi använder bevis i matematiken, leder det till att vi utifrån axiom och rådande förutsättningar, visar med tvingande logik att ett påstående är sant. En av lärarna menar

> *Att bevisa något matematiskt är att utnyttja det som redan är känt för att påvisa nya samband* (Kristina).

Lärarna påpekar att bevis är viktiga i undervisningen, eftersom med bevisens hjälp utvecklas det matematiska tänkandet och elevernas insikt i matematiska begrepp, som medför större förståelse i matematik. Det är viktigt för begreppslig förståelse, att kunna sätta in matematiska begrepp i olika sammanhang och i större perspektiv, för att få en djupare förståelse. Därför är det viktigt med bevis, eftersom de får resonera och knyta ihop olika satser.

> *Viktigast är att eleverna förstår varför de kan räkna på ett visst sätt, Krävs det bevis för det, så är de viktiga. Men själva bevisföringen som "metod",* tycker Kristina*, är viktigast för de elever, som ska läsa flera kurser i matematik eller är duktiga i det.*

Gemensamt för lärarna är att de anpassar sin undervisning till den matematiska nivå, där eleverna befinner sig. Alla lärare framför bevis för sina elever, men var och en anpassar undervisningen, beroende på vilken elevgrupp det är, och på vilken nivå de studerar matematiken. I de praktiska programmen - där elever kanske läser endast Matematik A och inte har planer att studera vidare på universitet - förekommer sällan bevis i undervisningen. De elever som läser teoretiska program - där är det tänkt att eleverna ska vidare utbilda sig - får fler genomgångar och bevis, på grund av vidare studier och att de är mer motiverade och intresserade av ämnet.

En av lärarna, Ida, säger att hon inte använder sig av många bevis på praktiska program, men hon förklarar i stället mer, utifrån olika beräkningar. Vidare förklarar hon:

> *Samtidigt får inte eleverna en begreppslig förståelse för vad de gör, utan det blir mer fokus på hur de ska hantera olika uppgifter, utan att de sätta sig in dessa i ett större sammanhang och förstå problemet* (Ida).

Samtidigt förklarar Ida, att hon vid genomgång av typexempel, tar med förklaringar som ger en förträning inför en mera formell bevisföring. Hon säger att *bevis kommer mer systematiskt ordentligt i högre kurser.* Det är viktigare att eleverna på praktiska program kan grundläggande matematik, och kan tillämpa formler för betyget G. Ida betonar vikten av att ta hänsyn till den elevgrupp man undervisar och vilken målsättning de har med sina matematikstudier - t ex om en elev är nöjd med att få betyget G på *Matematik A*, eller om eleven skall läsa fler kurser. Även Stefan uppmärksammar denna slags nivåanpassning

> *Det beror på vilken nivå det handlar om. För de praktiska programmen känns strikt bevisföring tidskrävande och upplevs nog meningslös för många elever. Där tycker jag att det räcker med trolig- göranden. För de studieförberedande programmen tycker jag att de bevis som är någorlunda kortfattade, kan tas upp i mån av tid. På NV/TE ska vissa bevis ingå, eftersom att det är träning för framtiden för deras del* (Stefan).

Maria beskriver att hon använder bevis i undervisningen, men att det beror på vilken kurs det är. Bevis och bevisföring ökar successivt, ju högre nivå och svårare kurserna är. Hon säger att:

> *I Matematik A blir det inte så många matematiska, noggranna bevis, oftast det blir mer förklaringar hur eleverna skall komma fram till lösningen. I matematik B kommer några in, Pythagoras sats, triangel summa, yttervinkel sats, mest inom geometri, Mat C - deriveringsregler. Bevis i undervisningen ökar ju högre upp till kurserna man kommer. Det förekommer mindre bevis på vuxenutbildningen, på grund att tiden inte räcker till, dock Pythagoras sats måste med* (Maria).

Lärarna har därmed uppfattningen, att det är svårt att få eleverna att förstå olika metoder och bevis, om det saknas grundläggande kunskaper, eller motivation för matematik.

Alla informanterna i undersökningsgruppen tar upp bevis med exempel eller bild. Sedan kan de i vissa fall gå på allmänt bevis. Detta hjälper eleverna att förstå ett nytt tema bättre, innan man använder sig av allmänna fall. De bevis, som lärare använder i undervisningen, är de som står i läroboken. Både Maria och Kristina använder för det mesta de bevis som står i boken, eftersom de anser att dessa är väl anpassade för elevernas nivå - dock definitivt inte alltid. Om de känner till något bevis, som de tycker är bättre eller enklare, använder de sig av det beviset i stället. Lärarna väljer det bevis, som de tror eleverna ska få mest av. Det kan bli tillräckligt enkelt bara de förstår beviset, annars är det tämligen meningslöst om beviset ligger högre är deras egna kunskaper. Det är bättre att eleverna lär sig lite än ingenting.

Stefan använder sig av bevis i de områden, där han tycker är möjligt - beroende på hur svåra bevisen är. *Det är viktigt att eleverna har nytta av det*, menar han. Därför använder han olika bevis; ibland gör han ett eget bevis, ibland letar han rätt på ett i böckerna eller på nätet. Anledningen till det, är att han vill ha bevis som känns lättillgängliga för eleverna, och som grundar sig på deras förkunskaper.

Ida säger att hon använder bevis i undervisningen, och förklarar att hon med sina elever på praktiska program, ofta *använder bevis till många elever med stora bristande kunskaper. Oftast blir det geometriska bevis med hjälp av klippa och klistra, för att eleverna lättare ska förstå - och det är det viktiga.*
Många gånger kan Ida hoppa över bevis, eftersom hon känner att det blir för mycket för eleverna och kan förvirrar dem, i stället för att bidra till djupare insikt. Hon fortsätter:

> *Eleverna på praktiska program vill helst veta hur man ska göra - inte varför man ska göra på ett visst sätt* (Ida).

Lärarna i undersökningen använder oftast tavlan i undervisningen av bevis, för att eleverna lätt ska kunna följa resonemangen. De förklarar, att man i geometrin kan använda sig av figurer då man förklarar formler för t.ex. volym. Lärarna genomför även laborativa aktiviteter. Ett exempel är att eleverna arbetar i grupp. Varje elev mäter upp skillnader i volym, till exempel med vatten, och förstår varför volymen av en pyramid är tre gånger så liten som i en cylinder, fast de har samma höjd och basarea o.s.v.(Matematik A). Detta handlar mer om att visa än att bevisa, men för eleverna är det ett bevis på att en formel stämmer. För många elever underlättar och ökar det förståelse för ämnet, och leder till att eleverna i geometri oftast relativt lätt ”ser” och följer med i resonemanget. I geometri förklarar lärarna nästan alltid bevis med hjälp av bilder. Lärarna kommenterar detta på följande sätt

> *I princip visas geometri alltid med bilder. Det är väl därför bevis härifrån ofta är tydliga. I algebra visas bara med steg, fast det vore säkert bra att visa med bilder även här, där det är möjligt* (Kristina).

> *De flesta bevis tar jag upp med exempel eller bild, sedan kan jag gå på allmänt fall* (Maria).

> *Jag använder olika metoder beroende på vilket område och vilken kurs det gäller. I de högre kurserna förekommer fler vanliga algebraiska bevis, men i visa fall kan de kompletteras med en bild eller graf* (Stefan).

Fördelarna med bevis och bevisföring är att de har motiverande effekt på eleverna, och ökar intresset och leder till bättre förståelse för matematiken, anser lärarna. Om man förklarar och visar varför det ska räknas på ett visst sätt, blir matematiken mer tillgänglig och begriplig för eleverna: En av lärarna förklarar det så här:

> *För att elever skall utveckla sitt matematiska tänkande och sin problemlösningsförmåga, är det centralt att de har begreppslig förståelse för de olika momenten, som de kan tänkas använda sig av. För att få en djupare insikt behöver de tillägna sig olika aspekter, som är viktiga för bevisföring. När elever själva genomför ett bevis, lär de sig att varje steg i ett resonemang utgår från tidigare steg. Med andra ord, lär de sig att resonera logiskt. Vid problemlösning måste eleverna exempelvis utveckla sin förmåga att motivera sina svar, och då är de viktigt att de kan argumentera för och förklara vad de har gjort* (Ida).

En annan lärare, som också ser fördelar med bevisföring, kopplar ihop elevers lärande med deras inställning till eller mottaglighet för, användning av bevis. Det är självklart om eleverna vill lyssna eller lära sig det. En av lärarna beskriver det på följande sätt:

> *Självklart tycker jag att användning av bevis utvecklar bättre förståelse och utökar kunskaper hos eleverna. Det är dock viktigt att eleverna vill ta emot och själva ser bevis, som resurs för förbättrade matematikkunskaper. Det är inte alla i klassen som tar bevis som utveckling - många bara sitter av tiden och frågar: ”måste vi kunna det?”, när det börja bli*

> *jobbigt att hänga med. Några få elever hänger med, och det är viktigt att kunna nå dem* (Maria).

Två av de andra informatörerna är inte helt säkra på, att bevis utvecklar bättre förståelse för matematiken. De beskriver detta på följande sätt:

> *Många bevis kan vara svåra för eleverna att förstå, och då fyller det ingen funktion. Men samtidigt behöver en del samband visas så att matematiken blir begriplig, och inte bara en massa "gör så här så blir det rätt"* (Kristina).

> *För de elever som ligger i framkant, så tror jag att bevis utvecklar bättre förståelse och utökar kunskaper hos eleverna, då det gäller algebraiska bevis. För de elever som tycker matematik är svårt, är det mest förvirrande. Däremot kan geometriska bevis vara givande för de flesta, just då det tas upp. Jag tror däremot inte att de har något utbyte av beviset, när det är dags att tillämpa satsen på uppgifter i t.ex. matteboken* (Stefan).

Pythagoras sats i svensk undervisning

Alla lärare i studie anser att Pythagoras sats är en viktig sats i matematikundervisningen, eftersom den är lätt att bevisa, och alla eleverna verkar förstå den. Dessutom kan man använda olika typer av bevis - t.ex. bildbevis, visuellt bevis eller algebraiskt bevis, som kan väljas beroende vilken elevgrupper och nivå man undervisar i, anser informatörerna. En av lärarna uttrycker det på följande sätt:

> *Denna sats är kanske en av många satser, som ger möjligheter att bevisa något som de allra flesta förstår. Dessutom kan man använda olika typer av bevis, som passar till elevgrupper och nivåer* (Stefan).

Fördelen med Pythagoras sats är att beviset kan anpassas till olika elevgrupper, som befinner sig på olika nivå och svårighetsgrad. Det är ett bevis, som eleverna ofta klara av att följa och förstå, steg för steg. En av lärarna berättar att hon bevisar Pythagoras sats, eftersom:

> *Pythagoras sats är ganska lätt att bevisa, och mycket användbar i matematiken, speciellt i geometri. Genom att bilda kvadrater från alla sidorna på en triangel och därefter bestämma arean på kvadraterna, bevisar jag satsen i Matematik A. I Matematik B använder jag ett lite mer avancerat bevis, genom att bilda till tre likadana trianglar och får en liten kvadrat i mitten. I båda fall syns beviset bra visuellt och algebraiskt* (Maria).

Stefan förklarar att anledningen till att bevisa satsen, är att *introducera ett vetenskapligt/kritiskt tänkande och förbereda elever inför kommande kurser*. Dock är anledningen till att lärarna ibland hoppar över beviset i Pythagoras sats, är att

> *På grund av tidsbrist, eller att man har en grupp som har svårt att lyssna på genomgångar, eller bara vill försöka klara av (bli klar med) matten, då blir det inte. I dessa fall är det kanske (nu skäms jag) också bristande engagemang från min sida. Elevernas och lärarens engagemang påverkar ju varandra en del* (Kristina).

De bevis, som visas för eleverna, är oftast anknutna till vilken elevgrupp undervisningen är för. Lärarna försöker välja de bevis, som är så tydliga och begripliga som möjligt för eleverna.

För elever på praktiska program, blir ett geometriskt bevis oftast visat med hjälp av bild och specialfall. Däremot för de studieförberedande programmen sker det oftast med hjälp av geometriska figurer, med övergång till algebraisk framställning. Målet med bevis är att försöka visa eleverna varför satsen, som ska leda till mer förståelse vid användning det i praktiken, gäller. Bevis är en förklaring, som hjälper eleverna att förstå ett visst fenomen inom matematiken. Bevis av Pythagoras sats ger förklaring till att den här räknesätt stämmer, och därför blir det på det sättet. Det är bra och nödvändigt att diskutera bevisens innehåll med eleverna, och presentera kanske mer symboliska bevis, som förklarar hur man kommer fram till resultatet, för att eleverna skall bli mer engagerade.

När Pythagoras sats tas upp i undervisningen, blir det oftast det bevis som finns i läroböckerna, eftersom tre av lärarna känner sig rätt nöjda med bokens framställning av satsen. Det skiljer sig lite mellan de olika böckerna. Dock tycker lärarna att författarna varit kloka i sitt val av framställning av Pytagoras sats, både för praktiker och för teoretiker. En av lärarna beskriver det på följande sätt:

> *Jag är nöjd med det mesta av lärobokens framställningar. Men de kräver genomgångar, förtydliganden och exempel. Många elever kan ibland ha svårt att förstå "stegen" i läroboken. Men det är lite bra också, det är viktigt med genomgångar och diskussioner i matematiken. Man behöver ju även få framställningen på fler sätt.*
> *Nu har jag inte boken framför mig, och kommer inte riktigt ihåg hur det var med Pythagoras sats. Jag har det för att det är lite olika framställningar i olika böcker av serien. Tror jag har använt NvAB bokens bevis, även till andra grupper. Har det för att jag tyckte det såg lättast ut att förstå* (Kristina).

Intervju med ukrainska lärare

De intervjuade personerna är:

- Julia: undervisar i matematik och har 29 års arbetslivserfarenhet;
- Vera: undervisar i matematik och fysik, och har 14 års arbetslivserfarenhet.

Båda lärarna har samma grunduppfattning och beskriver bevis, som ett logiskt resonemang som visar att påståenden är sanna. En av lärarna uttrycker det på följande sätt:

> *Bevis är ett logiskt resonemang, som med hjälp av olika satser, visar att ett påstående är sant* (Vera).

Lärarna menar att bevis och bevisföring är ett viktigt verktyg i matematikundervisningen, därför att det bidrar till snabbare inlärning och bättre förståelse för de undervisade temana. Eleverna lär sig effektivare, och kan använda sig av det i praktiken.

> *Bevis på satser och formler är ett viktigt och nödvändigt villkor för matematikundervisning, eftersom de bidrar till en snabb assimilering av inlärt material, förståelse och användning i praktiken* (Julia).
> *Доведення теорем, властивостей, формул є важливою і необхідною умовою на уроках матиматики тому що вони сприяють швидкому засвоєнню вивченого матеріалу і їх розумовому осмислені та використання на практиці* (Julia).

Båda lärarna använder bevis och bevisföring i undervisningen, från årskurs 7. De gör nästan alltid detta, så fort ett nytt tema behandlas på lektionen. Därefter följer 1 - 3 undervisningstimmar, när eleverna arbetar med uppgifter, och lär sig använda olika bevis vid uppgift lösningarna. Denna uppdelning följer lärarna enligt fastställda kursplaner för matematik. En av lärarna, Vera, förklarar att ibland delar hon eleverna i två grupper, där de högpresterande eleverna få arbeta med de krävande bevisen, och eleverna i den andra gruppen får låta bli, eftersom själva bevisen ligger på högre nivå än eleverna kan hantera. Inom geometri bevisar hon alla satser, eftersom det hjälper eleverna att lösa uppgifter på ett bättre sätt.

Lärarna använder oftast de bevis som står i läroböckerna - detta är ett krav, enligt kursplanen och undervisningsnivån i matematik, och som kallas ”de klassiska bevisen” (Класичні доведення). Ibland kan lärare använda böcker från olika författare, för att hitta ett bevis som ska vara mest lärorikt och begripligt för eleverna. Julia berättar också, att för de elever som läser fördjupning i matematik, lägger hon fram olika metoder av bevis, som ger bredare förståelse och kan tillämpas vid olika tillfällen i matematik.

För att få eleverna att bli nyfikna och delaktiga vid genomgången av ett nytt avsnitt och dess bevis, försöker lärarna skapa en problemlösningsuppgift som presenteras på tavlan, för att visa hur viktigt detta avsnitts kunskaper är vid problemlösningen. Lärarna försöker få eleverna delaktiga i uppgiften. Därefter försöker man tillsammans med eleverna i klassen hitta lösningar, med hjälp av redan förberett material, t.ex. olika modeller. Dessa har lärarna utarbetat själva, för att underlätta elevernas förståelse av olika satser, teorem och formler – som eleverna har bekantat sig med och kan använda sig av. Sedan presenteras bevis för det nya temat. Lärarna anser att bevis och bevisföring är viktiga verktyg i matematikundervisningen. Användning av bevis hjälper eleverna att få bättre förståelse och nya kunskaper i matematik.

Pythagoras sats i ukrainsk undervisning

Pythagoras sats är en av de viktiga satserna i geometrikursen. Kunnighet och användning av denna sats har viktig roll i undervisningen och i praktiken. Det är nödvändigt att eleverna kan denna sats, och kan använda den vid problemlösning och bevisföring, berättar de ukrainska informatörerna.

Pythagoras sats bevisas för alla eleverna i årskurs 8. Vilken av satsen som ska visas är beroende på vilken grupp av elever, som undervisning sker för. Oftast visas bevis av satsen med olika metoder, för att väcka elevernas intresse för satsen och matematiken. Första beviset som visas för eleverna, är det som står i läroboken (se Pythagoras sats i ukrainska läroböcker). Det är oftast lättillgängliga och begripliga bevis, för alla elever, menar Vera. Ibland händer det att lärarna omstrukturerar bevisföringen, med hjälp av kvoterna mellan sidorna, dvs. definitionen av cosinus för vinkeln i rätvinklig triangeln (cosinus för en vinkel = närliggande katet/hypotenusa). Detta ger, enligt lärarna, mer förståelse i användningen av satsen i matematiken, och knyter ihop teman om likformiga trianglarna.

De elever, som är intresserade av matematik eller läser specialisering i matematik, brukar få några andra bevis som de ska använda sig av och förklara för de resterande i gruppen (t.ex. metoder som finns i svenska läroböckerna: Matematik 3000 kurs B s. 142, eller Matematik 4000 kurs A s.291). Lärarna beskriver det på följande sätt:

För elever, som älskar matematik och studerar matematiken i större perspektiv, ges förslag att studera olika bevismetoder. Detta ger möjlighet till att få breddare förståelse för tema och större perspektiv vid användning.
Для учнів які люблять матиматику і займаються на факультативних заняттях або гуртковоюроботою даються різні варіанти доведення того чи іншого поняття. Це дае можливості ширше зрозуміти поняття і в різних ситуаціях використувати його (Vera).

Lärarna använder sig av läroböckerna i sin undervisning av bevis, så länge de anser att bevisen är bra. Men om de tycker de är dåliga eller för krångliga för eleverna, tar de ett annat bevis från en annan bok eller det, som de anser passar för elevgruppen. Viktigast, menar Vera, är att eleverna har nytta av det bevis, som motiverar varför en viss sats är sann utan att förvirra dem. För att ett bevis ska har en funktion skall det logiskt förklara varför ett påstående är sant, inte göra det mer oåtkomligt och oförstått.

Svenska och ukrainska matematik läroböckerna

Matematikböckerna i Ukraina för årskurs 5 och 6, samt böcker i algebra, är uppbyggda på samma sätt. Läroböckerna är uppdelade i olika matematiska avsnitt, som innehåller flera delmoment. Innan presentation av nya begrepp och moment införs, börjar varje kapitel med repetition från föregående kurs. Presentation av nya begrepp uppföljs med några exempel, sedan följer uppgifterna, som eleverna ska lösa med hjälp av nya definierade begrepp. Först presenteras uppgifterna som skall lösas muntligt, och därefter uppgifterna på nivå A, som följs av nivå B och nivå C, samt repetitionsuppgifter. En del läroböcker har extra uppgifter med extra information under rubriken ”för de som vill veta mer”.

Däremot skiljer sig böckerna i geometri från årskurs 7, från matematik och algebra böcker i strukturen och upplägget av uppgifter. Presentation av nytt tema och begrepp följs alltid upp av sats och bevis i detta påstående, för att bevis är viktiga i geometri. Uppgifterna i geometriboken har ingen uppdelning i svårighetsgrad, men har ändå en viss struktur genom att först ha inledande enkla uppgifter, som successivt övergår till svårare textuppgifter eller problemlösningsuppgifter. Först presenteras frågor för självkontroll, därefter uppgifter att lösa tillsamman med gruppen, och till sist lösningsuppgifter. Undervisningen sker enligt böckernas innehåll, för att kunna uppnå de uppsatta målen i matematik.

Läroböckerna i Sverige har delvis samma struktur, som böcker i matematik och algebra i Ukraina. Matematikböckerna är uppdelade i olika moment, som följs av delmoment. Nya begrepp introduceras och presenteras, med några exempel. Därefter presenteras lösningsuppgifter, som oftast är uppdelade i fyra olika nivåer. Först introduceras uppgifter med rubriken ”kan du den här” därefter nivå A, B och C. Efter varje kapitel finns det ”test XA och test XB uppgifter, samt sammanfattning och problemlösningsuppgifter.

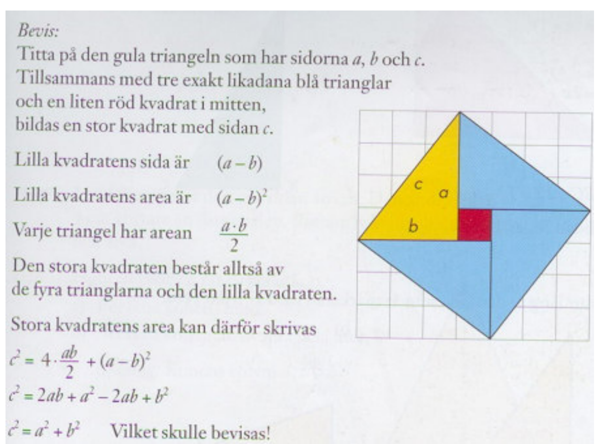
Pythagorassats i svenska och ukrainska läroböcker

Pythagoras sats påträffas första gången i svenska läroböcker i årskurs nio - i ”Matematikboken för grundskolans senare år” - publicerad av Undvall med flera (2004). Där väljer författarna att introducera Pythagoras sats, som hjälpmedel vid problemlösning, utan att introducera bevisen i denna sats.

I läroböcker för gymnasieskolan Matematik A och B, har olika författare presenterat tre olika versioner av Pythagoras sats. Genom att studera de olika böckernas tre olika bevis, finner jag två enklare och ett svårare. De två enklare bevisen är publicerade i följande böcker: Alfredsson m.fl. (2009) och Björk, L-E m.fl. (2000) Matematik A. De är uppbyggda på samma sätt, med hjälp av numeriskt bevis. Först introducerar de begreppet *hypotenusa* och *kateter*. Därefter ger de ett exempel, som anger en rätvinklig triangels sidors längd. Därefter hänvisar författarna till fig. på samma sida (”Matematik 3000” kurs B s. 142, eller ”Matematik 4000” kurs A s.291), som bildar kvadraterna från varje sida av triangeln, som visar att två mindre kvadrater är lika stora som kvadraten på hypotenusan, och förklarar: *Detta är Pythagoras sats*.

I boken av Björk, L-E. ”Matematik 3000” kurs B, presenteras ett klassiskt bildbevis. Först introduceras själva Pythagoras sats, därefter författarna visar en bildbevis där de resonerar utifrån en kvadrat med sidor c som är inskriven i en annan större kvadrat med sidor a + b. Figuren bildar fyra trianglar i vart och ett av hörnen av den större kvadraten. Triangelns kateter har längderna *a* och *b,* och hypotenusans längd är *c*. Genom att flytta två av fyra trianglar enligt figuren på sid. 148, bildas en figur som visar att arean c^2 i förra figuren, är lika med arean $a^2 + b^2$ i den andra figuren. Slutligen ser vi resultatet av Pythagoras sats $c^2 = a^2 + b^2$. Det påpekas att detta samband endast gäller rätvinkliga trianglar.

Holmström & Smedhamre (2008) introducerar i Matematik B ett visuellt bevis av Pythagoras sats, med övergång för algebraiskt framställning. Först introducerar författarna själva satsen och ger den historiska utvecklingen av den. Författarna beskriver att det finns många sätt att bevisa satsen, men väljer ett kinesiskt bevis, som är nästan 2000 år gammalt. Denna sats följer strukturen i det sistnämnda beviset, men istället för att ”flytta hit och flytta dit”, placeras trianglarna i den mindre kvadraten, enligt följande:


Bevis:
Titta på den gula triangeln som har sidorna a, b och c.
Tillsammans med tre exakt likadana blå trianglar
och en liten röd kvadrat i mitten,
bildas en stor kvadrat med sidan c.

Lilla kvadratens sida är $(a-b)$

Lilla kvadratens area är $(a-b)^2$

Varje triangel har arean $\frac{a \cdot b}{2}$

Den stora kvadraten består alltså av
de fyra trianglarna och den lilla kvadraten.

Stora kvadratens area kan därför skrivas

$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2$

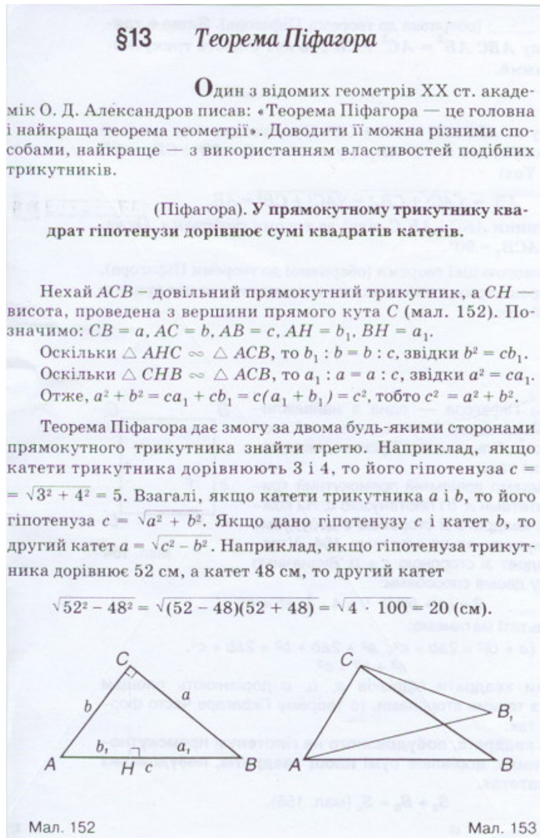
$c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$

$c^2 = a^2 + b^2$ Vilket skulle bevisas!

Bild 1: Pythagoras sats
(Holmström & Smedhamre, 2008 s.33)

I ukrainska läroböcker introduceras Pythagoras sats endast i boken för årskurs 8. Det är första gånger som Pythagoras sats presenteras och bevisas på olika sätt. I de högre kurserna används Pythagoras sats vid problemlösning - dock beskrivs inte själva bevisen för den. Bevz med flera (2008 s.117-119) beskriver den på följande sätt:

En känd geometriker på 1900-talet, O. D Aleksandrov, skrev: ”Pythagoras sats är en viktig och den bästa satsen i geometri”. Det finns många sätt att bevisa den, dock är det bästa sättet att använda sig av likformiga trianglar (Bevz, 2008).



§13 *Теорема Піфагора*

Один з відомих геометрів XX ст. академік О. Д. Александров писав: «Теорема Піфагора — це головна і найкраща теорема геометрії». Доводити її можна різними способами, найкраще — з використанням властивостей подібних трикутників.

(Піфагора). **У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.**

Нехай ACB – довільний прямокутний трикутник, а CH — висота, проведена з вершини прямого кута C (мал. 152). Позначимо: $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AH = b_1$, $BH = a_1$.

Оскільки $\triangle AHC \sim \triangle ACB$, то $b_1 : b = b : c$, звідки $b^2 = cb_1$.

Оскільки $\triangle CHB \sim \triangle ACB$, то $a_1 : a = a : c$, звідки $a^2 = ca_1$.

Отже, $a^2 + b^2 = ca_1 + cb_1 = c(a_1 + b_1) = c^2$, тобто $c^2 = a^2 + b^2$.

Теорема Піфагора дає змогу за двома будь-якими сторонами прямокутного трикутника знайти третю. Наприклад, якщо катети трикутника дорівнюють 3 і 4, то його гіпотенуза $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Взагалі, якщо катети трикутника a і b, то його гіпотенуза $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Якщо дано гіпотенузу c і катет b, то другий катет $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Наприклад, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 52 см, а катет 48 см, то другий катет

$$\sqrt{52^2 - 48^2} = \sqrt{(52 - 48)(52 + 48)} = \sqrt{4 \cdot 100} = 20 \text{ (см)}.$$

Мал. 152 Мал. 153

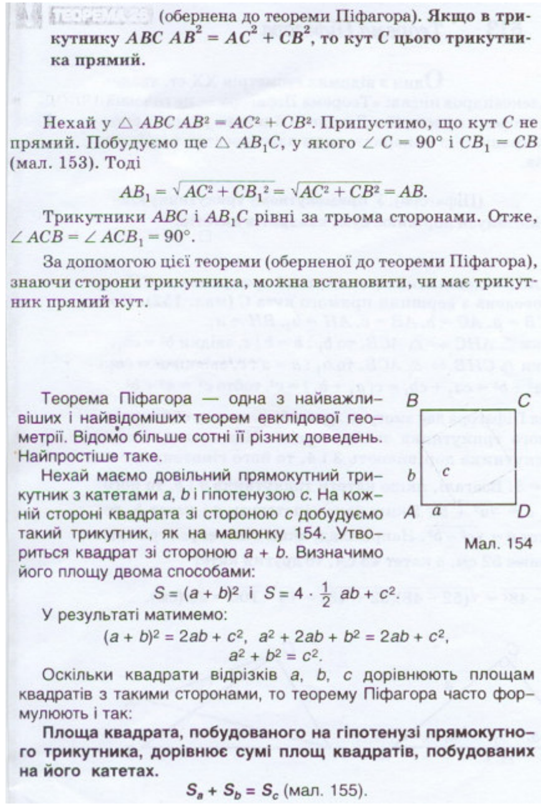
Bild 2: Pythagoras sats (ibid. s. 117)

(Pythagoras sats Bild 2). **I en rätvinklig triangel är kvadraten på hypotenusan lika med summan av kvadraterna på kateterna.**

Antag att ABC är en godtycklig rätvinklig triangel, där CH – höjden dragen från rätt vinkeln C (fig. 152) betecknar: CB = a, AC = b, AB = c, AH = b_1, BH = a_1.
Eftersom AHD = ACB, och b_1: b = b : c; därifrån $b^2 = cb_1$. (tecknet (**:**) står för division)
Eftersom CHB = ACB, a_1 : a = a : c, därifrån $a^2 = ca_1$.
Då blir $a^2 + b^2 = ca_1 + cb_1 = c(a_1 + b_1) = c^2$, det vill säga $c^2 = a^2 + b^2$.

Pythagoras sats ger oss möjlighet att hitta den tredje sidan, när vi har två sidor i en rätvinklig triangel. Till exempel, om kateterna förhåller sig i en triangel 3 mot 4, då blir deras hypotenusa c = $\sqrt{}(3^2 + 4^2)$= 5.
Överhuvudtaget, om kateterna a och b, så blir hypotenusan c = $\sqrt{}(a^2 + b^2)$. Om vi vet att hypotenusa c i katet b, då blir den andra kateten a = $\sqrt{}(c^2 - b^2)$. Till exempel, om hypotenusan i en triangel är lika med 52 cm, och katetern 48 cm, då blir den andra katetern

$\sqrt{}(52^2-48^2)$ =$\sqrt{}$(52-48) (52-48) = 20 (cm).



(обернена до теореми Піфагора). **Якщо в трикутнику ABC $AB^2 = AC^2 + CB^2$, то кут C цього трикутника прямий.**

Нехай у $\triangle ABC$ $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Припустимо, що кут C не прямий. Побудуємо ще $\triangle AB_1C$, у якого $\angle C = 90°$ і $CB_1 = CB$ (мал. 153). Тоді

$$AB_1 = \sqrt{AC^2 + CB_1^2} = \sqrt{AC^2 + CB^2} = AB.$$

Трикутники ABC і AB_1C рівні за трьома сторонами. Отже, $\angle ACB = \angle ACB_1 = 90°$.

За допомогою цієї теореми (оберненої до теореми Піфагора), знаючи сторони трикутника, можна встановити, чи має трикутник прямий кут.

Теорема Піфагора — одна з найважливіших і найвідоміших теорем евклідової геометрії. Відомо більше сотні її різних доведень. Найпростіше таке.

Нехай маємо довільний прямокутний трикутник з катетами a, b і гіпотенузою c. На кожній стороні квадрата зі стороною c добудуємо такий трикутник, як на малюнку 154. Утвориться квадрат зі стороною $a + b$. Визначимо його площу двома способами:

Мал. 154

$$S = (a + b)^2 \text{ і } S = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2.$$

У результаті матимемо:

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2, \quad a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Оскільки квадрати відрізків a, b, c дорівнюють площам квадратів з такими сторонами, то теорему Піфагора часто формулюють і так:

Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на його катетах.

$$S_a + S_b = S_c \text{ (мал. 155).}$$

Bild 3: Omvändningen till Pythagoras sats (s.118)

(Omvändningen till Pythagoras sats. Bild 3 och 4). **Om triangel ABC, $AB^2 = AC^2 + CB^2$, då vinkel C i den här triangeln är rätvinklig.**

Låt i en triangel ABC $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Anta att vinkel C inte rätvinklig. Vi bygger en till triangel AB_1C, där vinkel C = 90 i $CB_1 = CB$ (figur 153). Då

$$AB_1 = \sqrt{(AC^2+CB_1^2)} = \sqrt{(AC^2+CB^2)} = AB$$

Trianglarna ABC och AB_1C har tre likformiga sidor. Där vinkel ACB = vinkel ACB_1 = 90

Med hjälp av omvändningen av Pythagoras sats, om vet vi sidorna på en triangel, kan vi bestämma om triangeln har en rattvinkel.

Pythagoras sats är en viktig och känd sats inom euklidisk geometri. Det finns över 100 olika bevis. Den enklaste ser ut på det sättet.

Anta att vi har en godtycklig, rätvinklig triangel, där kateter a, b och hypotenusa c. Till varje sida på kvadraten med sidan c, bygger vi en sådan triangel som på figuren 154. Det blir en kvadrat med sidan a + b. Vi bestämmer arean på två satt:

$$S = (a + b)^2 \text{ och } S = 4 \ ab + c^2.$$

Vi får:

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2, \quad a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Eftersom kvadraten på *a, b, c,* lika med arean på kvadraterna med sådana sidor, då Pythagoras sats formuleras så där:
Arean på en kvadrat, som är byggd på hypotenusa i en rätvinklig triangel, lika med summa areor på kvadraterna, som är byggda på kateterna.

$$S_a + S_b = S_c \text{ (figur 155)}$$

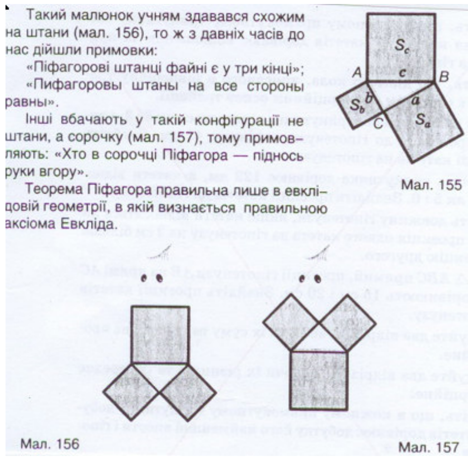

Такий малюнок учням здавався схожим на штани (мал. 156), то ж з давніх часів до нас дійшли примовки:
«Піфагорові штанці файні є у три кінці»;
«Пифагоровы штаны на все стороны равны».
Інші вбачають у такій конфігурації не штани, а сорочку (мал. 157), тому примовляють: «Хто в сорочці Піфагора — піднось руки вгору».
Теорема Піфагора правильна лише в евклідовій геометрії, в якій визнається правильною аксіома Евкліда.

Bild 4: Pythagoras sats (s.119)

Figuren liknade "byxor" för eleverna (fig. 156), därför mötte vi sådana uttryck:
”Pythagoras byxor är fina och har tre kanter”
”Pythagoras byxor har alla sidor lika”
Vissa ser en t-shirts istället för byxor, därför säger de: ”Den som har Pythagoras t-shirts lyft upp händerna”.
Pythagoras sats är bara sann i euklidisk geometri, i vilken man bestämmer sant Euklides axiom.

Metoddiskussion

Valet av undersökningsmetod - kvalitativ metod - för min studie, anser jag tillfredsställande, eftersom den information jag fick med hjälp av intervjuer, besvarar min forskningsfråga på ett bra sätt. Med hjälp av intervjuer fick jag de enskilda lärarnas uppfattning av bevis och dess roll i matematikundervisningen. Enligt Kvale & Brinkmann (2009) är syftet med intervjuer att förstå ämnet från den levda vardagsvärlden, ur de intervjuades egna perspektiv.

Om undersökningen skulle ha genomförts med hjälp av kvantitativ metod - enkät - anser jag att utfallet av resultatet skulle vara annorlunda. Detta, eftersom deltagarna med hjälp av kvantitativ metod, skulle ange korta - och till och med kanske ofullständiga - svar. En enkätundersökning skulle inte ge öppna, utförliga svar från informanternas sida. Därför anser jag att kvalitativ metod är mer passande i min undersökning. Denna skillnad i metodval beskriver Trost (2007) att kvantitativ undersökning svarar på fråga ”hur många”, medanden kvalitativa undersökningen ska användas om man vill förstå eller hitta mönster. Därför är den kvalitativa undersökningen mer passande. Personliga kontakten med deltagande har gett mig mera öppna och utförliga svar, än vad jag skulle ha fått om jag inte varit närvarande vid undersökningsprocessen.

Studiens tillförlitlighetsgrad kan alltid diskuteras vid kvalitativa studier. Eftersom alla intervjuerna har spelats in med hjälp av videokamera, har jag kunnat lyssna på informanternas svar så många gånger som det krävdes, för att vara säker på att svaren, som jag fått från informanterna, uppfattats rätt. Patel och Davidsson (2003) skriver, att för att få en högre reliabilitet i undersökningen, kan informationen lagras genom inspelning av ljud, därefter tas intervjuarensvaren i repris, så många gånger det krävs för att säkra att svaren har uppfattats korrekt. Reliabilitetsbrister kan förekomma i undersökningen, om till exempel intervjuaren tolkar svar på frågan fel (Stukát, 2005). Dessa reliabilitetsbrister undviker jag, genom att informanterna fick tillgång till deras renskrivna intervjusvar och hade möjlighet att ange synpunkter och undanröja eventuella feltolkningar. Metoden som används för att undvika reliabilitetsbrister är också en av metoderna för att höja validiteten i undersökningen, genom att informanterna kunde läsa och kommentera mina tolkningar av deras svar.

Däremot anser jag att resultatet av en likvärdig studie - som till exempel skulle genomföras på en annan skola - skulle se annorlunda ut. Eftersom det i min undersökning endast ingick fyra undervisande lärare från Sverige och två från Ukraina, kan jag inte dra några generella slutsatser. Med hjälp av min studie har jag fått enskilda lärarnas åsikter om bevisens funktion i matematikundervisningen.

Innan undersökningen påbörjades har jag garanterat alla informanterna anonymitet i undersökningen, eftersom det endast är jag som vet vem informanterna är och endast jag som har tillgång till inspelning av intervjuer, transkribering, samt utskriften av dessa. Stukan (2005) beskriver att det är viktigt att personerna i undersökningsgruppen ska vara medvetna om att den information som de angett kommer att behandlats anonymt, och det ska vara omöjligt att identifiera vem som har ställt upp på intervjun. Därför använder jag endast fingerade namn i min studie, för att intervjupersonerna inte ska kunna identifieras på något sätt.

Resultatdiskussion

Jämförelse mellan två utbildningssystem

En av likheterna mellan Sverige och Ukraina, är att grundskolan i de båda länderna är avgiftsfri och erbjuder en gemensam studiegång för alla elever. Barnen börjar den obligatoriska skolan vid sex eller sju års ålder, beroende på föräldrarnas önskemål. I båda länderna är grundskoleämnena desamma, bortsett från att eleverna i Ukraina inte läser religionskunskap. Eleverna i Ukraina får betyg från årskurs fem, medan eleverna i Sverige får betyg från årskurs åtta, enlig nuvarande regler. Med den nya reformen skall eleverna få betyg efter årskurs sex. Alla elever i Sverige är klara med sin grundskoleutbildning efter årskurs nio. Därefter kan eleverna fortsätta med vidare studier på något gymnasialt program. Däremot kan ukrainska elever välja att studera vidare två år på grundskolan, eller välja att läsa på någon annan gymnasial utbildning eller yrkesskola. Det finns också möjlighet att påbörja en gymnasial utbildning redan från årskurs åtta som bygger utbildningen på fördjupning inom ett visst ämne.

De rådande skillnaderna mellan läroplanerna i de två länderna är, att i den svenska läroplanen beskrivs ämnenas innehåll på övergripande målnivå, medan ämnenas innehåll i den ukrainska läroplanen beskrivs både på övergripande målnivå och på momentnivå. I Ukraina finns det, förutom läroplanen, fastlagda ämnesprogram för varje kurs, där det anges hur många undervisningstimmar eleverna skall få per vecka och per moment i alla ämnen, och vad eleverna skall kunna efter avslutat moment. I algebra i geometri kurserna beskrivs utförligt på momentnivå vilka satser eleverna ska kunna formulera och bevisa.

Det råder en skillnad mellan svensk och ukrainsk matematikundervisning. I Sverige är gymnasiematematiken uppdelad i sju kurser, varav Matematik A är ett kärnämne. I Ukraina förekommer däremot inte en liknande uppdelning av matematikundervisningen. Från årskurs sju läser eleverna i Ukraina matematik som två separata ämnen, algebra och geometri, som är obligatoriska kurser i gymnasieskolan. Därför kan en viss skillnad mellan olika yrkesutbildningar, som endast bygger på grundskolans utbildning plus de rådande yrkeskunskaperna, förekomma. Denna uppdelning gör, att svenska eleverna redan på grundskolan läser geometri på lägre nivå, än eleverna i Ukraina. Detta syns tydligt från läroböckernas framställning av Pythagoras sats. Redan i årskurs åtta är kravet för ukrainska elever, enligt kursplanen, att kunna bevis av Pythagoras sats - både vid problemlösning och bevisföring. Svenska eleverna får bekanta sig med Pythagoras sats i årskurs nio, och kriterierna är att eleverna kan använda den vid problemlösning.

Jämförelse av resultat från intervju

Alla lärare, både från Ukraina och från Sverige, definierar beviset som en förklaring och ett logiskt resonemang, där det - med hjälp av olika definitioner och satser - bevisas att ett påstående är sant. Det överensstämmer med Klisinska (2009), som beskriver bevis som ett logiskt argument, som visar att ett påstående är sant. Vidare, påstår lärarna, att bevis är viktiga verktyg i matematikundervisningen, eftersom det matematiska tänkandet, med hjälp av bevis, utvecklas och leder till bättre förståelse i undervisade teman på matematiklektionerna. Detta stämmer överens med tidigare studier, som genomfördes av Reuterswärd (2008) att alla lärare och matematiker i Hemmis (2009) resultat anser att bevis är viktiga i matematikundervisningen. Enlig tidigare studier, likväl som min egen, bedömer jag att bevis är viktiga i matematikundervisningen av den orsaken, att arbete med bevis ökar förståelse för matematiken, i enlighet med informanterna och tidigare litteraturstudierna. Enligt Hanna (2000) hjälper bevisen till att förstå innebörden av satser - inte bara visa att påståenden är sanna, utan likväl också förklarar varför de är sanna.

Det råder en skillnad ifråga hur bevis framförs i matematikundervisningen. Denna skillnad kan bero på att i Ukraina har geometri bredare plats i undervisningen. Denna skillnad syns markant, när jag jämför antalet undervisningstimmar i geometri i Ukraina och i Sverige. I Ukraina läser eleverna geometri i årskurs 8 (denna val görs eftersom Pythagoras sats presenteras i denna årskurs) 70 timmar per år, enligt Utbildningsdepartementet (2011a). Samma antal timmar gäller för årskurs 9. En liknande fördelning i antalet undervisningstimmar är avsedda för algebra, i ovanstående kurser. Eleverna, som läser fördjupningskursen i matematik, ges 105 undervisningstimmar per år i geometri i årskurs 8 och 9, och 175 undervisningstimmar per år i algebra, per varje kurs (ibid.). I gymnasieskolan erbjuds 35 undervisningstimmar i geometri och algebra, per år och kurs (Utbildningsdepartementet, 2011c). Däremot läser eleverna i Sverige geometriavsnittet i Matematik A under ungefär 5 veckor sammanlagt, 20 timmar per år i gymnasieskolan. I Matematik B undervisas geometriavsnittet ungefär under 10 timmar per år, som motsvarar 5 veckor och 2 h/vecka, enligt intervju personen Maria.

Det råder en viss skillnad hur bevisundervisningen anpassas efter elevgrupperna i båda länderna. Informanterna från Sverige anpassar sin undervisning efter den nivå eleverna ligger på, och vilken linje eleverna studerar på. På det praktiska programmet förekommer sällan bevisföring i undervisningen, på grund att den är tidskrävande och meningslös för många elever; oftast blir det mer förklaringar än bevis. Lärarna i studien menar, att det är svårt att få eleverna att förstå bevis, om det saknas grundläggande kunskaper i matematik. Denna anpassning stämmer överens med lärarnas syn i Reuterswärds (2008) och Essman & Wistrand (2009) undersökningar. I studierna beskrivs, att på de praktiska programmen förekommer mindre bevis än i de teoretiska programmen. Detta upplägg beror på att lärarna anser att det inte finns någon mening med bevis och bevisföring för elever, som saknar tillräckliga baskunskaper i ämnet.

Informanterna från Ukraina framför däremot bevis för alla elever, oberoende på vilken nivå de befinner sig. Det enda skillnaden är att lärarna i algebra, ibland väljer enklare bevismetoder, som är mer tillgängliga för alla elever. Bevis i geometri bevisas dock för alla, eftersom lärarna i undersökningen anser, att med hjälp av bevis och bevisföring, klarar eleverna bättre av att lösa uppgifterna. Bevis förklarar och visar varför det ska vara på det sättet. Detta stämmer överens med tidigare studier av Hersh (1997), som anser att bevis har en nyckelroll i klassrummet för att främja matematiskt förståelse. Enligt Reuterswärd (2008) och Essman & Wistrand (2009) framkom också att lärarna i undersökningen anser, att bevis har många funktioner, och en av dessa är att understödja matematisk uppfattning.

Enligt informanterna från båda länder framgår det, att oftast - men inte alltid - är bevisen, som används i matematik undervisningen, tagna från läroböckerna. De bevis, som står i elevernas böcker, är lättillgängliga och utformade för den grupp som undervisningen riktar sig till. Det stämmer med Johansson (2006), som beskriver att böckerna har syftet att erbjuda en väl genomtänkt och välgjord pedagogisk version av ett skolämne.

Ibland kan lärare välja ett annat bevis från andra böcker eller internet, om de anser att det kommer att främja elevers lärande. Enligt Skolverket (2003) framgår, att lärarens egen kreativitet få större spelrum och fler möjligheter att hitta olika metoder och arbetsformer, för att eleverna ska få ett intressant och lustfyllt lärande. Från rapporten syns också att lärare ska kunna välja lämplig litteratur och arbetsform, som stämmer överens med elevernas behov. Detta stämmer överens med lärarens val av olika bevispresentationer.

Två av fyra lärare i Sverige och de båda lärarna i Ukraina samt jag anser, att bevis är viktiga verktyg i matematikundervisningen. Lärarna anser att bevis har motiverande effekt på eleverna, som ökar sin förståelse i matematiken. Med hjälp av bevis utvecklas matematiskt tänkande och problemlösningsförmåga. Detta stämmer överens med Hemmis (2009), som berättar om att matematikerna i hennes studie beskriver olika funktioner, som bevis har i deras egen matematikundervisning. Ett av dessa är *nämligen att man med hjälp av bevis lär sig ett matematiskinnehåll och utvecklar olika tekniker som behövs i problemlösning och andra matematiska sammanhang* (ibid. s.95). Bevisens funktion som *förklaring* lyfts upp av forskarna i Hemmis studie, som den viktigaste funktion som bevis kan ha i undervisningen. Lärare i min studie och jag tycker att bevis har ett förklarande effekt, för att om det förklaras och visas varför eleverna skall räkna på ett visst sätt, blir matematiken mer intressant och tillgänglig.

Däremot vet de två andra svenska lärarna inte riktigt om bevis utvecklar bättre förståelse i matematik för alla elever. En av dem anser att bevis kan vara för svåra och för krångliga för många elever, och då fyller bevisen ingen funktion. Samtidigt anser denna lärare att vissa samband behöver förklaras, för att matematiken ska vara mer begriplig för eleverna. Den andra läraren skiljer mellan algebraiska bevis och geometriska, och tycker att för eleverna som är duktiga i matematik, utvecklar bevis förståelsen bättre då det gäller algebraiska bevis, fast för elever, som tycker att matematiken är tråkig, blir algebraiska bevis mest förvirrande. Däremot anser han också att geometriska bevis kan vara givande för alla elever.

Pythagoras sats är en viktig sats i matematikundervisningen anser både lärarna från Sverige och från Ukraina. Dock skiljer sig valet av bevismetoder mellan informanterna från båda länder. Svenska informanterna anser att denna sats är lätt att bevisa, och en av de satser som ger möjlighet att bevisa något som alla förstår. Det finns många bevis för Pythagoras sats. Därför kan lärare välja en av de bevis, som passar till olika elevgrupper. Vilken metod som används vid undervisningen, beror oftast på vilken nivå eleverna befinner sig, och till vilken grupp som satsen ska visas. För elever på praktiska program, försöker lärarna visa den enklaste metoden av satsen, t.ex. ett bildbevis eller bevis med hjälp av exempel. För elever på teoretiska program visas lite mer avancerat visuellbevis, som övergår till algebraisk framställning. Detta stämmer överens med Klisinska (2009), som beskriver att matematikundervisningen i skolan speglar några metoder av bevis som visuella bevis, induktiva bevis och bevis genom exempel.

Lärarna i Ukraina framför bevis för alla elevgrupper, utan undantag. Det bevis som presenteras för eleverna är från läroboken (se första beviset under rubriken *Pythagoras sats i ukrainska läroböcker*) och omvänt bevis av Pythagoras sats. Detta val av metod knyter lärarna an till avsnittet *Likformiga trianglar*, eftersom det är lättare för eleverna att fortsätta med samma beteckningar och proportionsframställningar, som i föregående avsnitt. Däremot utmanas de duktigare eleverna att bevisa Pythagoras sats med andra metoder, och visa sin framställning för hela gruppen.

Det bevis av Pythagoras sats, som tas upp i undervisningen, är oftast tagna från läroböckerna. Men ibland kan lärarna använda sig av ett annat bevis av Pythagoras sats, om de anser att det andra beviset är bättre och mer givande för eleverna. Viktigast av allt, tycker jag och lärarna i min studie, är att beviset bidrar till bättre förståelse och mer kunskaper i matematik.

Jämförelse av läroböcker

I min undersökning finner jag likhet mellan matematikläroböckerna i svenska skolan och ukrainska skolan. Denna likhet är att böckernas innehåll är uppdelad i olika moment och delmoment, samt att räkneuppgifterna är indelade i olika nivåer.

En stor skillnad är, att i Sverige läser eleverna endast matematik som ämne, medan eleverna i Ukraina läser matematik som ämne fram till årskurs 7, därefter delas matematik in i två olika kurser: algebra och geometri. Denna uppdelning leder till att ukrainska elever har mycket mer undervisningstimmar i geometri i skolan eller gymnasiet, än svenska elever ens får möjlighet till.

Bevis av Pythagoras sats introduceras i svenska läroböcker mycket senare, än i ukrainska läroböcker. Pythagoras sats med bevis presenteras redan i årskurs 8 i den ukrainska läroboken skriven av Bevz med flera (2008). I svenska läroböcker presenteras Pythagoras sats, men inte bevis för denna, i årskurs 9 i boken skriven av Undvall med flera (2003).

I Sverige väljer man att presentera Pythagoras sats med bevis på gymnasieskolan. Bevisen presenteras för elever, som läser Matematik A (Björk med flera 2008 & Alfredsson med flera 2009) med hjälp av ett beskrivande exempel, varvid numerisk metod används för att visa sanningen i satsen. I Matematik B boken, skriven av Björk, L-E med flera (2000), introduceras bevis med hjälp av en bild och i den andra Matematik B boken skriven av Holmström & Smedhamre (2008) visuell bevis med övergång till algebraiskt framställning.

I den ukrainska läroboken presenteras Pythagoras sars redan i årskurs 8, varvid eleverna bekantar sig med olika bevismetoder i denna sats. Likheten i bevisframställning är, att i den ukrainska läroboken presenteras alla ovan nämnda bevis (Bevz, 2008 s.117-119). Skillnaden är att författaren presenterar ett algebraiskt bevis av Pythagoras sats och bevisar omvändningen till den också. Dessa två sistnämnda bevis finns inte i svenska läroböckerna. Här väljer författarna enkla bevis, som är lättillgängliga för alla elever, i sina böcker.

Fortsatt forskning

Den kvalitativa undersökning, som jag har genomfört, visar inte en säker generell bild över vad lärare anser om bevis i matematikundervisningen. Den bild jag får fram täcker endast de intervjuade lärarnas syn på bevis. Därför skulle det vara intressant att genomföra mer övergripande undersökningar, som inkluderar en större undersökningsgrupp.

Det skulle vara intressant att genomföra en liknad undersökning, vars elever skulle besvara frågor om bevis och bevisföring i matematikundervisning. Detta för att få elevernas syn på bevis och vikten av bevis, i undervisningen och i praktiken.

En annan intressant aspekt vore att jämföra större antal läroböcker från olika länder och inspireras av dessas bevismetoder.

Referenser

Referenser på engelska och svenska

Alfredsson, L., Brolin, H., Erixon, P., Heikne, H. & Ristamäki, A. (2009). *Matematik 4000*. Kurs A. Stockholm: Natur och kultur. ISBN978-91-27-51163-7.

Bra böckers lexikon. (1991). Fjärde upplagan. Bokförlaget Bra Böcker.

Björk, L-E., Borg, K., Brolin, H., Ekstig, K., Heikne, H., Larsson, K. (2000). *Matematik 3000*. Kurs A. Stockholm: Natur och kultur. ISBN 91-27-51014-X

Björk, L-E., Borg, K., Brolin, H., Ekstig, K., Heikne, H., Larsson, K. (2000). *Matematik 3000*. Kurs B. Stockholm: Natur och kultur. ISBN 91-27-51015-8

Dahl, K. (2002). *Den fantastiska matematiken*. Fischer & Go. ISBN91-7054-963-X

Encyclopaedia of mathematics. (1991). Volume 7. Kluwer Academic Publishers. ISBN 1-55608-006-9

Essman, J., & Wistrand, L. (2009). *Bevis – en kvalitativ undersökning av bevisföring I gymnasieskolans matematik*. Examensarbete. Mälardalens högskola.

Hanna, G. (1994). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (p. 54-61). New York: Springer

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 42-49

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2), 5-23

Hersh, R. (1998). *What is mathematics, Really?* London: Vintage.

Hemmi, K. (2006). *Approaching Proof in a Community of Mathematical Practice*. Stockholm. ISBN 91-7155-307-X

Hemmi, K. (2009). Bevis - en osynlig del av matematikundervisningen? In. G. Brandell, B. Grevholm, K. Wallby & H. Wallin (Ed.), *Matematikdidaktiska frågor – resultat från en forskarskola* (s.92-104). Göteborg.

Holmström, M. & Smedhamre, E. (2008). *Matematik för gymnasiet kurs B*. Liber. Best.nr 47–01907-6

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning*. Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM. Göteborgs universitet. ISBN: 978-91-85143-18-4

Johansson, M. (2006). *Teaching Mathematics with Textbooks*. A Classroom and Curricular Perspective. Luleå: Universitetstryckeriet.

Klisinska, A. (2009). *The Fundamental Theorem of Calculus*. A case study into the didactic transposition of proof. Luleå: Universitetstryckeriet. ISBN 978-91-86233-46-4

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 978-91-44-05598-5

Nationalencyklopedin (1990). Ett uppslagsverk på vetenskapligt grund utarbetat på initiativ av statens kulturråd. Bokförlaget bra böcker.

Nyberg, R. (2000). *Skriv vetenskapliga uppsatser och avhandlingar*. Lund: Studentlitteratur. ISBN91-44-01000-1

Patel, R. & Davidsson, B. (2003). Forskningsmetodikens grunder. Att planera, genomföra och rapportera en undersökning. Studentlitteratur. ISBN978-91-44-02288-8

Reuterswärd, E. (2008). *Vilket skulle bevisas. En fenomenologisk studie om hur gymnasielärare ser på bevis i matematikundervisningen*. (Examensarbete). Stockholm: Stockholms universitet.

Skolverket (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik 2001-2002*. Rapport nr 221. Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2010). *Förordning om ämnesplaner för de gymnasiegemensamma ämnena*. Regeringen beslutar om förordning om ämnesplaner för de gymnasiegemensamma ämnena med den lydelse som framgår av bilagan. Utbildningsdepartementet. U2010/854/G, U2010/73567G http://www.skolverket.se/content/1/c6/02/35/65/Gymgemensamma.pdf (besökt 2010-02-04)

Skolverkets hemsida: http://www.skolverket.se

Skolverket. (2011a). (http://www.skolverket.se/sb/d/2386) (besökt 2010-04-11)

Skolverket. (2011b). *Kursplan för matematik för grundskolan*. http://www.skolverket.se/sb/d/2386/a/16138 (besökt 2011-04-11)

Skolverket. (2011c). (http://www.skolverket.se/sb/d/2398) (besökt 2010-04-11)

Skolverket. (2011d). *Kursplaner i matematik för gymnasieskolan.* http://www.skolverket.se/sb/d/726/a/13845 (besökt 2010-04-11)

Skolverket. (2011e). (http://www.skolverket.se/sb/d/3013/a/22920) (besökt 2010-03-29)

Stukát, S. (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-03615-9

Trost, J. (2007). *Enkätboken*. 3:e upplagan. Lund: Studentlitteratur. ISBN 978-91-44-04046-2

Trost, J. (2010). *Kvaliattiva intervjuer*. 4:e upplagan. Lund: Studentlitteratur. ISBN 978-91-44-06216-7

Undvall, L., Olofsson, K-G. & Forsberg, S. (2003). Matematikboken för grundskolans senare år. Stockholm: Liber. ISBN 91-21-17649-3

Utrikespolitiska institut www.ui.se (besökt 2011-03-23)

Wikipedia. www.wikipedia.se (besökt 2011-01-25)

Referenser på ukrainska

Bevz, (Bevz, G., Bevz, V., & Vladimirova, N. (2008). Geometria 8 klas. Keiv: Veza. ISBN-978-966-7091-72-9. (Бевз, Г., Бевз, В., і Владімірова, Н. (2008). Геометрія 8 класу Кiев: Веза ISBN-978-966-7091-72-9).

Utbildningsdepartement (Міністерство освіти і науки України) (2011), Läroplanet (Типові навчальні плани загальноосвітніх навчальних закладів). Besökt 2011-04-12

(a) http://www.mon.gov.ua/education/average/new_pr/math.doc

(b) http://www.mon.gov.ua/education/average/prog89/matem.pdf

(c) http://www.mon.gov.ua/newstmp/2008/15_10/1_9_647.doc

http://www.mon.gov.ua/laws/MON_357_07_1.doc

(d) http://www.mon.gov.ua/education/average/concept.doc

Bilaga 1: Intervjufrågor på svenska

1. Hur lång arbetslivserfarenhet har du som lärare?

2. Vilka ämnen undervisar du i?

3. Beskriv din egen definition av bevis?

4. Vad anser du om bevis i matematikundervisningen? Är det viktigt/oviktigt? Nödvändigt/meningslöst?

5. När använder du bevis i matematikundervisningen? Ofta/sällan? Inom vilka områden, geometrin, algebra, etc.

6. Vilka bevis använder du dig av? Från läroboken, annan litteratur, från en annan lärare och varför?

7. Hur tar du upp bevis i matematikundervisningen? Med hjälp av ett exempel, en bild, visuell bevis?

8. Tycker du att bevis in undervisningen utvecklar elevernas begreppsbildning i matematik? Motivera ditt svar.

Pythagoras sats

9. Tycker du att bevis av Pythagoras sats är viktigt i undervisningen?

10. Bevisar du Pythagoras sats för eleverna?

11. Vilket bevis av Pythagoras sats använder du i matematikundervisningen? Beror det på elevgrupper? Din egen erfarenhet?

12. Är du nöjd med bokens framställning av Pythagoras sats? Ja/nej? Varför?

Bilaga 2: Intervju frågor på ukrainska

Запитання

1. Скільки років ви працюєте вчителем?
2. Які предмети ви викладаєте?
3. Опишіть ваше власне визначення слова: доведення?
4. Що ви думаєте про доведення на уроках математики? важливо/несуттєво; необідно/безглуздно
5. Коли ви використовуєте доведення на уроках математики? часто/рідко; і в яких областях геометрії, алгебри.
6. Які доведення використовуєте ви на уроках? З підручника, іншої літератури, від іншого вчителя. Чому?
7. Як ви викладаєте доведеня на ваших уроках? За допомогою: зображеня, візуальних доказів. Чому?
8. Рахуєте ви, що використання доведень в навчанні розробляє краще розуміння та знання учнів?

Теорема Піфагора

9. Як ви думаєте, доведення теореми Піфагора має важливе значення на уроках математики?
10. Доводите ви теорему Піфагора для учнів? Так/ні; Чому?
11. Які докази теореми Піфагора ви використовуєте на уроках? Чи залежать вони від знань класу; власного досвіду. Чому?
12. Задоволені ви доведенням теореми Піфагора в підручнику? так/ні Чому?