Lech Maligranda (Luleå)

Osiągnięcia polskich matematyków w teorii interpolacji operatorów: 1910–1960^{*}

Polskimi autorami twierdzeń interpolacyjnych w latach 1910–1960 byli Władysław Orlicz, Stefan Banach, Józef Marcinkiewicz oraz Antoni Zygmund.

1. Dlaczego lata od 1910 do 1960?

Powyższe pytanie pojawia się natychmiast przy omawianiu problematyki interpolacji operatorów. Naturalna odpowiedź jest taka że najpierw musiały się pojawić przestrzenie, by następnie można było badać operatory między nimi. Właśnie w 1910 roku zdefiniowane zostały przestrzenie L^p , których znaczenia w analizie nie sposób przecenić. Wprowadzić miarę i całkę Lebesgue’a, a w konsekwencji przestrzeń $L^1[a, b]$ poznał świat dziesięć lat wcześniej, ale to Frigyes Riesz w pracy [119] formalnie zdefiniował i rozpoczął badanie przestrzeni $L^p[a, b]$ z wykładnikiem $p \in (1, \infty)$, przez które rozumiał wszystkie klasy funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue’a na $[a, b]$, dla których norma

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

jest skończona, przy czym identyfikował funkcje równe prawie wszędzie na przedziale $[a, b]$.

^{*} Praca ta jest rozszerzoną wersją odczytu wygłoszonego przeze mnie 23 maja 2011 roku na XXV Konferencji Naukowej z Historii Matematyki *Matematyka polska I połowy XX wieku*, która odbyła się w Iwoniczu Zdroju w dniach 23–27 maja 2011 roku.

Riesz udowodnił, że $L^p[a, b]$ są przestrzeniami Banacha, których dual $(L^p[a, b])^*$, tzn. przestrzeń wszystkich funkcjonałów liniowych określonych i ograniczonych na nich, można identyfikować z $L^{p'}[a, b]$, gdzie p' jest wykładnikiem sprzężonym do p , czyli $1/p + 1/p' = 1$. Riesz rozważał też n -wymiarowe przestrzenie l_n^p dla $p \in (1, \infty)$ oraz nieskończone wymiarowe przestrzenie ciągowe l^p zdefiniowane jako

$$l^p = \left\{ x = (x_n) : \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Odnajdujemy, że przestrzenie L^p powszechnie nazywane są w literaturze przestrzeniami Lebesgue'a, a nie Riesza. Matematycy uznali tutaj pierwszeństwo Lebesgue'a, ale nie zawsze są tacy konsekwentni. Otóż w pracy Riesza pojawiła się tzw. *nierówność Höldera*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \quad \text{dla dowolnych } f \in L^p[a, b], g \in L^{p'}[a, b], \quad (1)$$

którą wykorzystuje się m.in. dowodząc nierówności trójkąta, czyli tzw. *nierówności Minkowskiego*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{dla dowolnych } f, g \in L^p[a, b]. \quad (2)$$

Warto jednak wspomnieć, że nierówność (1), w nieco innej postaci, została udowodniona przez L. C. Rogersa już w 1888 roku i – w kolejnej wersji przez O. Höldera – rok później w artykule [41], który zacytował pracę Rogersa [125] i napisał *za Rogersem udowadniam* (...). W klasycznej książce o nierównościach [39], w przypisie na stronie 25, czytamy: *Hölder states the theorem in a less symmetrical form given a little earlier by Rogers*. Może więc nierówność Höldera należałoby nazywać nierównością Rogersa?

F. Riesz był pierwszym, który uzyskał i stosował nierówności (1) i (2) dokładnie w takiej postaci, w jakiej obecnie ich używamy, w ścisłym związku z przestrzeniami funkcyjnymi $L^p[a, b]$ i ciągowymi l_n^p oraz l^p (zob. pracę [119]). Dlatego też czasami nierówność (1) nazywana bywa nierównością Höldera–Riesza lub nierównością Cauchy'ego–Riesza, a nierówność (2) nierównością Minkowskiego–Riesza. My jednakże nierówność (1) określać będziemy jako *nierówność Höldera–Rogersa*, tzn. umieścimy nazwiska w porządku alfabetycznym, a nie we właściwym historycznie porządku („nierówność Rogersa–Höldera”), by nie zakłócać za bardzo utartego nazewnictwa. Dokładniejsze informacje o historii nierówności (1) znaleźć można w pracy [83].

H. Minkowski udowodnił nierówność (2) w 1896 roku dla sum skończonych (zob. książkę [98]). W 1913 roku F. Riesz wykazał w książce [120], że z nierówności (1) wynika nierówność (2) dla sum skończonych (choć

badał już wtedy przestrzenie L^p dla $p \in (1, \infty)$, a także dla całek (co zauważył w roku 1928 w pracy [121]). W istocie obie te nierówności są równoważne (zob. prace [47, 84, 126]).

W 1919 roku w artykule Hugona Steinhausa [141] zdefiniowana została przestrzeń $L^\infty[0, 1]$ klas funkcji mierzalnych f na przedziale $[0, 1]$, dla których $m(\{x \in [0, 1] : |f(x)| > \alpha\}) = 0$ dla pewnego $\alpha > 0$, przy czym m oznacza miarę Lebesgue’a na odcinku $[0, 1]$. Najmniejszą taką stałą α nazywamy supremum istotnym funkcji f – wyznacza ona normę na tej przestrzeni. Dokładniej,

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, 1]} |f(x)| := \inf \{ \alpha > 0 : m(\{x \in [0, 1] : |f(x)| > \alpha\}) = 0 \}.$$

Jak zauważa Steinhaus, przestrzeń $L^\infty[0, 1]$ jest izometryczna z przestrzenią dualną do $L^1[0, 1]$.

Przestrzenie L^p i wiedza o nich służyły Banachowi jako ważne przykłady zdefiniowanych przez niego w 1920 roku liniowych przestrzeni unormowanych i *przestrzeni Banacha*, nazywanych przez ich twórcę „przestrzeniami typu B” (ang. *spaces of type B*). Określenie to występuje w doktoracie Banacha zakończonym w czerwcu 1920 roku na Uniwersytecie we Lwowie i opublikowanym w 1922 roku jako artykuł [3]. Warto wspomnieć, że liniowe przestrzenie unormowane zdefiniował niezależnie Norbert Wiener w 1922 roku, który uznał jednak pierwszeństwo Banacha (zob. pracę [149]).

Historię przestrzeni Banacha i operatorów działających między nimi opisuje dokładnie Albrecht Pietsch w swojej książce [116]. Pietsch dzieli historię analizy funkcjonalnej na cztery główne okresy: 1900–1920 (przestrzenie Hilberta, L^p , l^p i $C[0, 1]$), 1921–1932 (narodziny teorii przestrzeni Banacha), 1932–1958 (czas powstawania fundamentalnych twierdzeń zakończony książkami Daya, Dunforda–Schwartz’a, Hillego–Phillipsa i Taylora) oraz okres współczesny, po 1959 roku (zob. recenzję [88] jego książki).

Naturalne wydaje się tutaj też pytanie, kto pierwszy rozważał przestrzenie $L^p(\mu)$ na dowolnej abstrakcyjnej przestrzeni miary (Ω, Σ, μ) , a nie tylko na $[a, b]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ czy $\mathbb{N}$. Moja wiedza w tym względzie jest następująca. Otto Marcin Nikodym (1887–1974) w 1931 roku w pracy [103] jako pierwszy rozważał przestrzenie $L^1(\mu)$ nad skończoną miarą μ i uzyskał równość $[L^1(\mu)]^* = L^\infty(\mu)$. Przestrzenie $L^p(\mu)$ nad miarą σ -skończoną pojawiły się w 1939 roku w pracy Dunforda–Pettisa [30], a w 1940 roku ukazała się ich praca [31] z dokładnymi dowodami. Wykazują oni m.in., że dla miary σ -skończonej μ i liczby $p \in [1, \infty)$ zachodzi równość $[L^p(\mu)]^* = L^{p'}(\mu)$, gdzie $1/p + 1/p' = 1$.

W roku 1944 ukazała się książka McShane’a [97], w której rozważane są przestrzenie $L^p(\mu)$ nad dowolną przestrzenią miary (Ω, Σ, μ) . Jest to naj-

prawdopodobniej pierwsza książka z tak ogólnymi rozważaniami. Podobnie czynili później Hahn i Rosenthal (w 1948 roku), Halmos (w 1953 roku) i, oczywiście, Dunford–Schwartz w książce [32], wydanej w 1958 roku.

A teraz jeszcze odpowiedź na pytanie, dlaczego kończę omawianie na 1960 roku. Chciałem omówić osiągnięcia obejmujące okres pięćdziesięciu lat, czyli faktycznie okres 1910–1959. Właśnie w 1959 roku ukazała się ważna książka Antoniego Zygmunda [155]. Rozdział XII w niej to *Interpolation of linear operations. More about Fourier coefficients*, gdzie pojawiają się twierdzenia Riesz–Thorina i Marcinkiewicza o interpolacji operatorów.

O wadze tej monografii Zygmunda może świadczyć fakt, że już jej pierwsze wydanie [153] było przedrukowane dwa razy: w 1952 i 1955 roku, natomiast drugie wydanie [155] zostało przetłumaczone na język rosyjski (zob. książkę [156]) oraz było przedrukowywane w latach 1968, 1977, 1979 i 1988. Książka doczekała się też trzeciego wydania w 2007 roku, z ośmiostronicową przedmową Roberta A. Feffermana, gdzie pada zdanie:

Z całą pewnością, książka Antoniego Zygmunda *Trigonometric series* była i jest nadal jedną z najbardziej istotnych książek w historii analizy matematycznej.

Wydanie książki Zygmunda z 1935 roku bywa nazywane *małym Zygmundem*, a drugie wydanie z 1959 roku – *wielkim Zygmundem*. Raphael Salem rozpoczyna recenzję drugiego wydania książki stwierdzeniem (zob. recenzja [130, str. 6]):

W swoim kursie na Uniwersytecie w Cambridge profesor Littlewood nazwał pierwsze wydanie książki Zygmunta „Biblią”. Drugie wydanie, które pojawiło się niemal dwadzieścia pięć lat po pierwszym, z pewnością zasługuje na tę nazwę i to jeszcze bardziej, nie tylko dlatego, że omawia badania w tej dziedzinie z tego okresu, ale także dlatego, że autor, korzystając z nowych twierdzeń i stałej refleksji nad swoimi badaniami, dodał wiele zagadnień, których nie było w pierwszym wydaniu.

Jean-Pierre Kahane, recenzując trzecie wydanie książki Zygmunda, powtarza (zob. recenzja [51, str. 377]):

J. E. Littlewood nazwał ją „Biblią”. Po tylu latach, jest to jeszcze bardziej niż kiedykolwiek „Biblią”: jest to książka o trwałej wartości, absolutne arcydzieło, i publikacja encyklopedyczna na teraz i na długie lata.

Lata 1910–1960 stanowią ważny okres dla teorii interpolacji operatorów i dlatego też ten okres postanowiłem omówić.

2. Twierdzenie interpolacyjne Riesz–Thorina (1926, 1939)

Pierwsze twierdzenie interpolacyjne (nazywane także twierdzeniem o wypukłości) udowodnił Marcel Riesz (1886–1969) w pracy opublikowanej w 1926 roku, a wysłanej do druku w styczniu 1927 roku (sic!).

G. Olof Thorin (1912–2004) podał w 1939 roku ładny dowód rezultatu M. Riesz'a stosując narzędzia teorii funkcji zespolonych (twierdzenie o trzech prostych dla funkcji analitycznych w pasie $0 < \operatorname{Re} z < 1$ i ograniczonych oraz ciągłych w pasie $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$). Doceniając wkład Thorina zaczęto odtąd mówić o twierdzeniu Riesz–Thorina, gdyż zapewne wielu matematyków podzielało opinię J. E. Littlewooda, który napisał o dowodzie Thorina, że to „najbardziej zuchwały pomysł w matematyce, i świetny sukces” (zob. książki [64, str. 20; 65, str. 40]).

Warto wspomnieć, że praca [146] dała Thorinowi licencjat,¹ natomiast publikacja [147] jest doktoratem wypromowanym przez Marcela Riesz'a i obro-nionym na Uniwersytecie w Lundzie.

Zespolona wersja twierdzenia interpolacyjnego Riesz–Thorina ze stałą 1, gdy (Ω_1, μ) i (Ω_2, ν) są dwiema przestrzeniami miar σ -skończonych, a przestrzenie funkcji p -całkowalnych są zespolone (zob. prace [122, 146, 147]), ma następującą postać.

Twierdzenie 2.1 (Riesz 1926, Thorin 1939). *Niech $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ oraz $\theta \in [0, 1]$. Określmy p i q równościami*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \quad (3)$$

Wtedy z ograniczoności dowolnego operatora liniowego $T: L^{p_0}(\mu) \rightarrow L^{q_0}(\nu)$ i $T: L^{p_1}(\mu) \rightarrow L^{q_1}(\nu)$ (tzn. założenia, że T jest mocnego typu (p_0, q_0) i mocnego typu (p_1, q_1)) wynika ograniczoność $T: L^p(\mu) \rightarrow L^q(\nu)$ (tzn. T ma mocny typ (p, q)) oraz zachodzi oszacowanie na normy

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}}^{1-\theta} \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}}^{\theta}. \quad (4)$$

Geometrycznie twierdzenie oznacza wypukłość w kwadracie $[0, 1]^2$ zbioru takich punktów $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \in [0, 1]^2$, że operator liniowy $T: L^p(\mu) \rightarrow L^q(\nu)$ jest ograniczony.

¹ Licencjat w Szwecji to praca, jaką zwykle pisze się dwa lata po ukończeniu studiów, bądź jaką doktorant czy doktorantka pisze w ciągu dwóch pierwszych lat swojego pięcioletniego czasu na napisanie doktoratu. Może też zakończyć swoją edukację doktorską na licencjacie, zwłaszcza wtedy, kiedy pojawiają się problemy z uzyskaniem oryginalnych wyników.

1. Zespolona wersja twierdzenia interpolacyjnego Riesz–Thorina:

$$M_0 = \left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0} \right), M_1 = \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1} \right), M = \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right)$$

Technika interpolacji znacząco upraszcza oryginalne dowody o ograniczoności znanych operatorów i daje dobrą intuicję, jakie oszacowania mogą być prawdziwe. Zobaczmy to na dwóch klasycznych przykładach – transformacie Fouriera i operatorze splotu.

Przykład 2.1 (nierówność Hausdorffa–Younga). Punktem wyjścia dla M. Riesz do udowodnienia twierdzenia 2.1 była *nierówność Hausdorffa–Younga* (dotycząca ograniczoności transformacji Fouriera – jako uogólnienie równości Parsewala i lematu Riemanna–Lebesgue’a) wykazana przez Younga w 1912 roku dla p' parzystych oraz przez Hausdorffa w 1923 roku dla dowolnego p . Jeżeli $1 \leq p \leq 2$, to transformata Fouriera $\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y) dy$ jest operatorem ograniczonym z $L^p(\mathbb{R}^n)$ w $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ oraz $\|\mathcal{F}f\|_{p'} \leq (2\pi)^{n/p'} \|f\|_p$ dla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Zastosujemy twierdzenie 2.1 do udowodnienia powyższego rezultatu. Ograniczoność $\mathcal{F}: L^1 \rightarrow L^\infty$ wynika z oszacowania

$$|\mathcal{F}f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ixy} f(y)| dy = \|f\|_1 \quad \text{dla } f \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

Z równości Parsewala wynika zaś, że $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow L^2$ oraz

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(x)|^2 dx = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2 dy \quad \text{dla } f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Dla $\theta \in [0, 1]$ mamy

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2},$$

czyli $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$. Stąd $q = p'$, $1 \leq p \leq 2$ i $\mathcal{F}: L^p \rightarrow L^{p'}$ jest ograniczony oraz

$$\|\mathcal{F}f\|_{p'} \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}\theta} \|f\|_p = (2\pi)^{\frac{n}{p'}} \|f\|_p \quad \text{dla } f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Beckner w pracy [8] wykazał, że najlepsza stała w nierówności Hausdorffa–Younga ma wartość $A_p^{n/2}$, gdzie $A_p = p^{1/p}/(p')^{1/p'}$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją gaussowską (w przypadku $n = 1$, $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$). Wersję ciągową udowodnił w 1935 roku Aleksander Rajchman w artykule [117]. Swoją rezultat prezentował już 29 czerwca 1930 roku, jako uczestnik Pierwszego Kongresu Matematyków Rosyjskich (24–29 czerwca 1940 roku) w Charkowie, wygłaszając odczyt *Quelques remarques sur le theoreme Young–Hausdorff–Riesz*.

Przykład 2.2 (nierówność Younga dla operatora splotu). Rozważmy operator splotu

$$Tf(x) = k * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y) dy,$$

przy czym $k \in L^r(\mathbb{R}^n)$ oraz $1 \leq r < \infty$. Jeżeli $1 \leq p \leq r'$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r'}$ i $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, to $k * f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ oraz $\|k * f\|_q \leq \|k\|_r \|f\|_p$. Udowodnimy nierówność Younga za pomocą twierdzenia 2.1.

Z nierówności Minkowskiego wynika, że jeżeli $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to

$$\begin{aligned} \|Tf\|_r &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y) dy \right\|_r \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|k(x-y)f(y)\|_r dy = \\ &= \|k\|_r \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = \|k\|_r \|f\|_1, \end{aligned}$$

czyli $T: L^1 \rightarrow L^r$ jest ograniczony, a z nierówności Höldera–Rogersa otrzymujemy, że dla $f \in L^{r'}(\mathbb{R}^n)$ zachodzi oszacowanie

$$|Tf(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |k(x-y)f(y)| dy \leq \|k\|_r \|f\|_{r'},$$

czyli $T: L^{r'} \rightarrow L^\infty$ jest ograniczony. Z twierdzenia Riesz–Thorina operator $T: L^p \rightarrow L^q$ jest ograniczony, jeśli

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{r'}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{\infty}.$$

Eliminując θ z tych równości otrzymujemy $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r'}$ i $1 \leq p \leq r'$ oraz oszacowanie normy

$$\|Tf\|_q = \|k * f\|_q \leq \|k\|_r \|f\|_p \quad \text{dla } f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

W artykule [8] Beckner wykazał, że $\|k * f\|_q \leq (A_p A_{q'} A_r)^{n/2} \|k\|_r \|f\|_p$.

Twierdzenie 2.1 było obiektem zainteresowań wielu matematyków. Zygmund uogólnił je we wspólnych pracach z Tamarkinem [144], Salemem [131] i Calderónem [21, 22].

W 1950 roku Calderón i Zygmund wykazali prawdziwość zespolonej wersji twierdzenia interpolacyjnego Riesz–Thorina w pasie $[0, 1] \times [0, \infty)$ (zob. prace [21, Twierdzenie E; 22, Twierdzenie A₁]). Ich dowód pozostaje poprawny również dla całej ćwiartki $[0, \infty) \times [0, \infty)$, tzn. dla przestrzeni quasi-Banacha. Jest to więc kompletna wersja twierdzenia interpolacyjnego Riesz–Thorina w przypadku zespolonym.

Twierdzenie 2.2 (zespolona wersja twierdzenia interpolacyjnego Riesz–Thorina w pierwszej ćwiartce). *Niech $p_0, p_1, q_0, q_1 \in (0, +\infty]$. Dla $\theta \in (0, 1)$ określmy p, q równościami*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Wtedy z ograniczoności dowolnego operatora liniowego $T: L^{p_0}(\mu) \rightarrow L^{q_0}(\nu)$ i $T: L^{p_1}(\mu) \rightarrow L^{q_1}(\nu)$ wynika ograniczoność $T: L^p(\mu) \rightarrow L^q(\nu)$ oraz zachodzi oszacowanie na normy

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}}^{1-\theta} \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}}^{\theta}. \quad (5)$$

Uwaga 2.1. Twierdzenie 2.2 (dla całej pierwszej ćwiartki) zostało udowodnione przez Calderóna i Zygmunda w latach 1950–1951, jednak obecnie nosi ono nazwę twierdzenia interpolacyjnego Riesz–Thorina w przypadku zespolonym.

Uwaga 2.2. W przypadku quasi-unormowanych przestrzeni Lebesgue’a (tzn., gdy $0 < p, q \leq \infty$) może się okazać, że jedynym operatorem liniowym i ograniczonym z $L^p(\mu)$ w $L^q(\nu)$ jest operator zerowy. Przykładowo, gdy $T: L^p(\mu) \rightarrow L^q(\nu)$ jest operatorem liniowym ograniczonym, jeśli miara μ jest bezatomowa i $0 < p < \min\{1, q\}$, to $T = 0$ (dowód można znaleźć na przykład w książkach [18, str. 89; 78, str. 150]). Oczywiście, gdy miara μ jest atomowa, to twierdzenie 2.2 już się nie trywializuje.

W przypadku przestrzeni rzeczywistych Riesz zauważył w pracy [122], że oszacowanie (4) może nie być prawdziwe w „górnym trójkącie” – zob. książka [18, str. 16–17] oraz prace [36, str. 109, 112–113; 90, str. 266; 122, str. 493–494].

Przykład 2.3. Dla operatora $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mamy:

$$\|T\|_{\infty,1} = \sup_{\max\{|x|,|y|\}=1} (|x+y| + |x-y|) = 2,$$

$$\|T\|_{2,2} = \sup_{|x|^2+|y|^2=1} (|x+y|^2 + |x-y|^2)^{1/2} = \sqrt{2}$$

oraz, co wymaga pewnych rachunków (zob. artykuł [89, str. 1365–1369]),

$$\|T\|_{4,4/3} = \sup_{|x|^4+|y|^4=1} (|x+y|^{4/3} + |x-y|^{4/3})^{3/4} = \sqrt{3}.$$

Dla $\theta = 1/2$ we wzorach (3) otrzymamy $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = (1 - \frac{1}{2})(0, 1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ale

$$\|T\|_{4, \frac{4}{3}} = \sqrt{3} > \|T\|_{\infty,1}^{1/2} \|T\|_{2,2}^{1/2} = 2^{1/2} (\sqrt{2})^{1/2} = 2^{3/4}.$$

Stosując związek między normami operatora w przypadku rzeczywistym i normą jego naturalnej kompleksyfikacji otrzymujemy twierdzenie interpolacyjne Riesz–Thorina w przypadku rzeczywistym, z jego wersji w przypadku zespolonym, ale – w ogólności – w oszacowaniu (5) pojawia się pewna stała $C > 1$, tzn.

$$\|T\|_{p,q} \leq C \|T\|_{p_0,q_0}^{1-\theta} \|T\|_{p_1,q_1}^{\theta}. \quad (6)$$

Przypomnijmy, że każdy operator liniowy i ograniczony $T: L^p(\mu) \rightarrow L^q(\nu)$, dla $p, q \in (0, \infty]$, działający między przestrzeniami rzeczywistymi, ma naturalne rozszerzenie do przestrzeni zespolonych $T_{\mathbb{C}}: L_{\mathbb{C}}^p(\mu) \rightarrow L_{\mathbb{C}}^q(\nu)$ dane wzorem $T_{\mathbb{C}}(f + ig) = T(f) + iT(g)$. Operator $T_{\mathbb{C}}$ jest liniowy i ograniczony. Zapytajmy o najlepszą stałą $C_{p,q}$ w oszacowaniu norm

$$\|T_{\mathbb{C}}\|_{L_{\mathbb{C}}^p \rightarrow L_{\mathbb{C}}^q} \leq C_{p,q} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q}.$$

W istocie jest nią najlepsza stała w oszacowaniu

$$\left\| \sqrt{(Tf)^2 + (Tg)^2} \right\|_q \leq C_{p,q} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \left\| \sqrt{f^2 + g^2} \right\|_p$$

dla dowolnych $f, g \in L^p(\mu)$.

W 1939 roku Marcinkiewicz i Zygmund wykazali, że $C_{p,p} = 1$ dla $p \in (0, \infty]$ (zob. pracę [94, Twierdzenie 1, str. 116], a także prosty dowód w książce Zygmunta [155, str. 181]). Ich rozumowanie pozwala uzyskać równość $C_{p,q} = 1$ dla przypadku $0 < p \leq q \leq \infty$. Oczywiście nierówność $1 \leq C_{p,q} \leq 2$, w przypadku

$1 \leq p, q \leq \infty$, wzmocnił w 1977 roku Krivine wykazując w artykule [59], że $C_{p,q} \leq \sqrt{2}$.

Intensywne badania dotyczące stałej $C_{p,q}$ dla dowolnych $p, q \in (0, \infty]$ prowadziło wielu matematyków (o czym można przeczytać w artykule [90]), a efekty tych badań to oszacowania stałych $C_{p,q}$ dla $p, q \in (0, \infty]$, co w konsekwencji daje poniższe oszacowania normy w rzeczywistej wersji twierdzenia interpolacyjnego Riesz–Thorina.

Twierdzenie 2.3. *Twierdzenie interpolacyjne Riesz–Thorina w przypadku rzeczywistym w całej pierwszej ćwiartce zachodzi z oszacowaniem (6), gdzie stała C spełnia nierówność $C \leq C_{p_0,q_0}^{1-\theta} C_{p_1,q_1}^\theta$, a dokładniej (przy $i = 0, 1$):*

- 1° $C = 1$, gdy $0 < p_i \leq q_i \leq \infty$,
- 2° $C \leq C_{\infty,1} = \sqrt{2}$, gdy $1 \leq q_i < p_i \leq \infty$,
- 3° $C \leq C_{1,0^+} \leq 4/\pi$, gdy $0 < q_i < p_i < 1$,
- 4° $C \leq C_{2,0^+} = \sqrt{2}$, gdy $0 < q_i \leq 1 < p_i \leq 2$,
- 5° $C \leq C_{\infty,0^+} = 2$, gdy $0 < q_i < 1, 2 \leq p_i \leq \infty$, przy czym $C_{p,0^+} = \lim_{q \rightarrow 0^+} C_{p,q}$.

2. Obszary w twierdzeniu 2.3

Oczywiście, jeśli punkty $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0})$ i $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})$ leżą w różnych obszarach, to C oszacowane jest przez większą ze stałych C_{p_i,q_i} .

Z twierdzeń 2.1–2.3 wynika więc, że w twierdzeniu interpolacyjnym Riesz–Thorina w przypadku zespolonym oszacowanie (6) zachodzi ze stałą $C = 1$ w całej ćwiartce $Q = [0, \infty) \times [0, \infty)$. Podobnie rzecz przedstawia się w przypadku rzeczywistym też ze stałą $C = 1$, ale wyłącznie w „dolnym trójkącie” ćwiartki Q , tzn. w przypadkach, gdy $0 < p_i \leq q_i \leq \infty$, $i = 0, 1$. W „górnym trójkącie” tej ćwiartki trzeba jednak przyjąć $C = 2$.

Używając twierdzenia o trzech prostych dla funkcji subharmonicznych Calderón i Zygmund [23] udowodnili twierdzenie RIESZA–THORINA dla operatorów nieliniowych.

Twierdzenie 2.4 (Calderón i Zygmund 1956). *Twierdzenie interpolacyjne RIESZA–THORINA pozostaje prawdziwe dla operatorów punktowo subliniowych, tzn. spełniających dla prawie wszystkich x i dowolnego $\lambda \in \mathbb{C}$ warunki*

$$|T(f+g)(x)| \leq |T(f)(x)| + |T(g)(x)| \quad i \quad |T(\lambda f)(x)| = |\lambda| |T(f)(x)|.$$

S. Janson wykazał w pracy [48], że twierdzenie interpolacyjne sformułowane dla operatorów liniowych z dowolnej pary przestrzeni quasi-Banacha (X_0, X_1) do pary (L^{q_0}, L^{q_1}) , gdy $q_0, q_1 \in [1, \infty]$, pozostaje w mocy dla operatorów punktowo subliniowych. Ogólniejszy przypadek, gdy parę (L^{q_0}, L^{q_1}) zastąpimy parą (E_0, E_1) dowolnych przestrzeni idealnych Banacha, udowodnili BUKHVALOV i MALIGRANDA (zob. prace [19, 79]). Wykorzystali oni obserwację NIKISHINA poczynioną w artykule [102], że każdy operator subliniowy majoryzuje operator liniowy oraz twierdzenie HAHNA–BANACHA dla operatorów liniowych o wartościach w porządkowo zupełnej przestrzeni $L^0(\mu)$.

3. Problem Banacha nr 87 z Księgi Szkockiej

Znając twierdzenie interpolacyjne RIESZA z roku 1926 Banach wpisał do *Księgi Szkockiej* w sierpniu 1935 roku problem 87 dotyczący interpolacji operatorów nieliniowych.

Problem (Banacha). Niech $1 \leq p < r < q \leq \infty$. Załóżmy, że operator ciągły $T: L^p[0, 1] \rightarrow L^p[0, 1]$ spełnia warunek Lipschitza

$$\|Tf - Tg\|_p \leq M_p \|f - g\|_p \quad \text{dla dowolnych } f, g \in L^p[0, 1] \quad (7)$$

oraz $T: L^q[0, 1] \rightarrow L^q[0, 1]$ jest ograniczony, tzn.

$$\|Tf\|_q \leq M_q \|f\|_q \quad \text{dla dowolnego } f \in L^q[0, 1].$$

Czy jeśli $f \in L^r[0, 1]$, to $Tf \in L^r[0, 1]$ oraz $\|Tf\|_r \leq M_r \|f\|_r$ dla każdego $f \in L^r[0, 1]$?

Ciekawe, skąd u Banacha zainteresowanie – już w tym czasie – operatorami nieliniowymi? Przypomnę, że jego słynna książka [5] dotyczy operatorów liniowych, a wcześniejsza wersja polska [4] zawiera zapowiedź w tytule: *Tom I. Operacje Liniowe*, tzn. planowany był też tom drugi. Faktycznie, w 1935 roku

87) Problem Banacha
 Niechaj operacja $y = U(x)$, określona w L^p ($p \geq 1$), której przeciwobrazowa nieściągłość w L^p będzie ciągła i spełniająca warunki Lipschitza. Załóżmy, że ~~jest~~ dla pewnego $\lambda > 0$ istnieje stała M_λ taka, że jeżeli $x \in L^p$ wówczas $U(x) \in L^p$ i $\|U(x)\|_p \leq M_\lambda \|x\|_p$.
 Wykazać, że dla każdego p takiego, że $\lambda < p < \infty$ istnieje M_p o własności:
 jeżeli $x \in L^p$ wówczas $U(x) \in L^p$ i $\|U(x)\|_p \leq M_p \|x\|_p$.
~~Wskazać, że twierdzenie jest prawdziwe przy dodatkowych założeniach: U jest operacją liniową, $U(1) = 1$ (czyli U jest operacją M. Riesz).~~
 Banach wykazał prawdziwość twierdzenia gdy $\lambda = \infty$.

$$\|U(x)\|_p = \left[\int |U(x)|^p dt \right]^{1/p}$$

3. Problem Banacha nr 87, wpisany do Księgi Szkockiej w sierpniu 1935 roku

pojawił się anons na okładce tomu VI *Monografii Matematycznych* o przygotowywanej książce Banacha, *Théorie générale des opérations*. Anons był powtarzany na okładkach *Monografii Matematycznych*, w tomach VII (1937 rok), VIII (1938 rok) i X (1938 rok).

Czy coś więcej wiadomo o tej przygotowywanej książce Banacha?

Może chodziło o badania J. P. Schaudera, S. Mazura i M. Kerner'a? A może jednak chodziło o operatory wielomianowe, które rozważali: w 1929 roku M. Fréchet, w 1931 roku A. D. Michal i jego uczniowie, a we Lwowie kolejno S. Mazur i W. Orlicz opublikowali w latach 1935 i 1936 po dwie prace z tej problematyki, uzupełniając je artykułem o operatorach wymiernych. A może Banach miał na uwadze także operatory analityczne?

Sam Banach w 1938 roku opublikował pracę o operatorach wielomianowych w L^2 . Ponadto na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Oslo (14–18 lipca 1936 roku) wygłosił odczyt plenarny *Teoria operacji i jej znaczenie w analizie* [6]. Przedstawił w nim wyniki z zakresu operatorów liniowych, wielo-

mianowych i analitycznych na przestrzeniach Banacha, wraz z zastosowaniami, a także twierdzenia o punkcie stałym i teorię Leraya–Schaudera. Prezentację zakończył uwagami o operatorach na przestrzeniach Hilberta.

Naturalny jest też problem Banacha przeformułowany na operatory Lipschitza (choć nie występuje on w tej formie u Banacha). Przyjmuje on wtedy następującą postać (zob. prace [17, str. 2030–2031; 70; 71; 75]). Załóżmy, że $1 \leq p < r < q \leq \infty$ i niech operator ciągły $T: L^p[0, 1] \rightarrow L^p[0, 1]$ spełnia warunek Lipschitza (7) oraz niech $T: L^q[0, 1] \rightarrow L^q[0, 1]$ też spełnia warunek Lipschitza (ze stałą M_q). Przyjmijmy dodatkowo, że $T(0) = 0$. Czy wtedy $T: L^r[0, 1] \rightarrow L^r[0, 1]$ spełnia automatycznie warunek Lipschitza

$$\|Tf - Tg\|_r \leq M_r \|f - g\|_r \quad \text{dla dowolnych } f, g \in L^r[0, 1]?$$

Częściowe lub pełne odpowiedzi na problem Banacha podał sam Banach w 1935 roku dla $q = \infty$ (ale nic mi nie wiadomo, czy gdzieś zachował się jego dowód), a następnie Orlicz w artykule [111] dla $p = 1$ i $q = \infty$ (nawet dla operatorów Lipschitza), J. L. Lions (zob. pracę [62]) dla $p > 1$ oraz dla ciągłego operatora $T: L^q \rightarrow L^q$, G. G. Lorentz i T. Shimogaki w artykule [69] dla $q = \infty$.

J. Peetre (zob. pracę [113]) i L. Maligranda (zob. prace [70, 71, 75, 76, 79, 82]) dali odpowiedź pozytywną w pełnej ogólności, a nawet wykazali twierdzenie typu Banacha dla rzeczywistej metody interpolacji Lionsa–Peetre, jak również dla operatorów Lipschitza. Podobne twierdzenie typu Banacha dla zespolonej metody interpolacji nie jest prawdziwe (zob. prace Cwikela [28] i Maligrandy [79]), ale metoda zespolona interpoluje operatory Lipschitza (zob. książkę [18] oraz artykuły [16, 74, 79]). Badania nad problemem Banacha i twierdzeniem Peetre’ego w wagowych przestrzeniach L^p znajdujemy też u Kaplńskiego w artykule [52]. Uogólnienie zaś twierdzenia Peetre’ego na operatory Höldera podał Tartar w pracy [145], a dalsze uogólnienie obu tych rezultatów Maligranda w artykule [76].

Na zakończenie tej części podamy dowód rezultatu Banacha ($1 \leq p < r < q = \infty$) pochodzący od Lorentza–Shimogakiego (zob. pracę [69, str. 220]). Dowód przeprowadzimy dla dowolnych przestrzeni miary. Po pierwsze, możemy założyć, że $M_p = M_\infty = 1$, biorąc zamiast operatora T nowy operator $S = T / \max(M_p, M_\infty)$. Wtedy zachodzi punktowa nierówność

$$|Tf(x) - (Tf)^{(\lambda)}(x)| \leq |Tf(x) - T(f^{(\lambda)})(x)|, \quad (8)$$

dla prawie wszystkich $x \in \Omega_1$, gdzie $f^{(\lambda)}$ to λ -obcięcie ($\lambda > 0$) funkcji f , zdefiniowane wzorem

$$f^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{gdy } |f(x)| \leq \lambda, \\ \lambda \operatorname{sgn} f(x) & \text{gdy } |f(x)| > \lambda. \end{cases}$$

Rzeczywiście, gdy $|Tf(x)| \leq \lambda$, to po lewej stronie nierówności otrzymujemy zero, więc nierówność (8) zachodzi w sposób oczywisty. Natomiast, gdy $|Tf(x)| > \lambda$, to na mocy nierówności $\|T(f^\lambda)\|_\infty \leq \|f^\lambda\|_\infty \leq \lambda$ otrzymujemy $|T(f^\lambda)(x)| \leq \lambda$ dla prawie wszystkich x i stąd

$$\begin{aligned} |Tf(x) - (Tf)^{(\lambda)}(x)| &= |Tf(x) - \lambda \operatorname{sgn} Tf(x)| = |Tf(x)| - \lambda \leq \\ &\leq |Tf(x)| - |T(f^\lambda)(x)| \leq |Tf(x) - T(f^\lambda)(x)|. \end{aligned}$$

Zauważmy, że gdy $1 \leq p < r < \infty$, mamy reprezentację

$$u^r = \int_0^u (u-t)^p d\alpha(t) = \int_0^\infty (u-t)_+^p d\alpha(t), \quad u > 0, \quad (9)$$

gdzie α jest dodatnią, niemalejącą, lewostronnie ciągłą funkcją spełniającą warunek $\alpha(0) = 0$. Pierwszą równość można wykazać używając pochodnej ułamkowej

$$u^r = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_0^u (u-t)^p \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} t^r dt, \quad \text{gdzie } \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} t^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-p)} t^{r-p},$$

natomiast druga równość jest oczywista. Jeżeli $f \in L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$, to stosując przedstawienie (9) i twierdzenie Fubniego, dostajemy

$$\begin{aligned} \|Tf\|_r^r &= \int_{\Omega_2} |Tf(x)|^r dv = \int_{\Omega_2} \left(\int_0^\infty (|Tf(x)| - t)_+^p d\alpha(t) \right) dv = \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\Omega_2} (|Tf(x)| - t)_+^p dv \right) d\alpha(t) = \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\Omega_2} (|Tf(x) - (Tf)^{(t)}(x)|)_+^p dv \right) d\alpha(t) = \\ &= \int_0^\infty \|Tf - (Tf)^{(t)}\|_{L^p(v)}^p d\alpha(t). \end{aligned}$$

Dalej, z własności (8) i lipschitzowskości T między przestrzeniami L^p otrzymujemy

$$\|Tf - (Tf)^{(t)}\|_{L^p(v)} \leq \|Tf - T(f^{(t)})\|_{L^p(v)} \leq \|f - f^{(t)}\|_{L^p(\mu)},$$

czyli

$$\|Tf\|_r^r \leq \int_0^\infty \|f - f^{(t)}\|_{L^p(\mu)}^p d\alpha(t) = \|f\|_r^r.$$

W konsekwencji $\|Tf\|_r \leq \|f\|_r$ dla $f \in L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$. Ostatecznie, ponieważ przestrzeń $L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$ jest gęsta w $L^r(\mu)$, to dla każdego $f \in L^r(\mu)$ istnieje taki ciąg $f_n \in L^p \cap L^r$, że $\|f_n - f\|_r \rightarrow 0$. Stosując lemat Fatou otrzymujemy

$$\|Tf\|_r \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|Tf_n\|_r \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_r \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\|f_n - f\|_r + \|f\|_r) = \|f\|_r,$$

co kończy dowód.

4. Trzy twierdzenia interpolacyjne Orlicza

Niech X_0, X, X_1 będą przestrzeniami Banacha, przy czym mamy ciągłe włożenia $X_1 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_0$. Jeżeli dowolny operator ograniczony i liniowy (lub Lipschitza) $T: X_i \rightarrow X_i$ dla $i = 0, 1$ staje się automatycznie ograniczony (Lipschitza) jako operator z X w siebie, to wtedy przestrzeń X nazywa się *przestrzenią interpolacyjną* między X_0 i X_1 dla operatorów liniowych (Lipschitza).

Przypomnijmy, że operator $T: X \rightarrow X$ nazywa się *operatorem Lipschitza* w przestrzeni unormowanej X , jeżeli $T0 = 0$ oraz istnieje taka stała dodatnia M , że $\|Tx - Ty\| \leq M\|x - y\|$ dla dowolnych $x, y \in X$. Najmniejsza stała M jest normą Lipschitza operatora T i oznacza się ją przez $\|T\|_{\text{Lip}(X)}$.

Oczywiście, jeśli przestrzeń X jest interpolacyjna dla operatorów Lipschitza, to jest ona interpolacyjna dla operatorów liniowych.

W 1932 roku Orlicz w pracy [107] wprowadził przestrzenie nazywane obecnie *przestrzeniami Orlicza* $L^M[a, b]$ przy założeniu, że wypukła, niemalejąca i ciągła funkcja $M: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ z $M(0) = 0$ spełnia warunek Δ_2 dla dużych u , tzn. istnieją takie stałe $C \geq 1$ i $u_0 \geq 0$, że $M(2u) \leq CM(u)$ dla dowolnych $u \geq u_0$. Przestrzeń $L^M[a, b]$ to przestrzeń wszystkich takich $f \in L^0[a, b]$, że *norma Orlicza*

$$\|f\|_M^0 = \sup \left\{ \left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| : \int_a^b M^*(|g(x)|) dx \leq 1 \right\} \quad (10)$$

jest skończona, gdzie $M^*(u) := \sup_{v>0} [uv - M(v)]$ jest funkcją sprzężoną do M , a $L^0[a, b]$ jest przestrzenią wszystkich funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a na $[a, b]$ z identyfikacją funkcji równych prawie wszędzie na $[a, b]$. Jeśli M spełnia warunek Δ_2 dla dużych u , to przestrzeń $L^M[a, b]$ pokrywa się ze zbiorem $L_0^M[a, b]$, tzn. zbiorem tych $f \in L^0[a, b]$, dla których

$$I_M(f) := \int_a^b M(|f(x)|) dx < \infty.$$

Odnótujmy jeszcze, że Birnbaum i Orlicz, w pracy [12] opublikowanej rok wcześniej, badali pewne własności tego zbioru, ale nie wprowadzili tych przestrzeni w jawny sposób i nie analizowali problemów z punktu widzenia przestrzeni Banacha.² Przestrzenie, które dziś znamy jako przestrzenie Orlicza pojawiły się dopiero u Orlicza w pracy [107].³

W 1934 roku Orlicz [108] udowodnił twierdzenie interpolacyjne dla operatorów liniowych.

Twierdzenie 4.1 (Orlicz 1934). *Niech funkcja M spełnia warunek Δ_2 dla dużych u . Wówczas przestrzeń $L_0^M[a, b]$ jest przestrzenią interpolacyjną między przestrzeniami $L^1[a, b]$ i $L^\infty[a, b]$ dla operatorów liniowych. Ponadto $\|T\|_M \leq \max(\|T\|_1, \|T\|_\infty)$.*

W oryginalnym sformułowaniu twierdzenia prawą stroną nierówności rozpoczyna stała $C > 1$.

W 1936 roku Orlicz wprowadził przestrzenie Orlicza w pełnej ogólności, tzn. bez dodatkowego założenia $M \in \Delta_2$ dla dużych u . W pracy [109] zdefiniował przestrzeń $L^M[a, b]$ jako przestrzeń wszystkich takich funkcji $f \in L^0[a, b]$, że norma Orlicza (10) jest skończona. Zauważmy, że w równości (10) możemy

² Warto odnotować, że w tej pracy Birnbauma–Orlicza pojawia się funkcja dopełniająca (sprężona) M^* do funkcji M (nawet dla niewypukłej funkcji M) zdefiniowana wzorem $M^*(u) := \sup_{v>0} [uv - M(v)]$, a pierwszeństwo we wprowadzeniu tej definicji przypisywane jest – niesłusznie – S. Mandelbrojtowi (zob. pracę [92]), jak to czyni na przykład W. Fenchel w artykule [33].

³ Są i byli matematycy, jak na przykład Wojbor Woźczyński i Edwin Hewitt (1920–1999), kolega Birnbauma z Seattle, którzy prowadzą kampanię dodania nazwiska Birnbauma do przestrzeni Orlicza. Sam Hewitt nie ma pracy z tytułem przestrzenie Birnbauma–Orlicza, ale jego studenci byli do tego przymuszani, jak np. pani Iracema Bund, doktorantka Hewitta, o czym mnie poinformowała osobiście w Sao Paulo w 1989 roku. Wojbor Woźczyński zaś w artykule [150] stwierdza, że *przestrzenie Orlicza to są przestrzenie Birnbauma–Orlicza*. Ostatnio do zwolenników nazwy przestrzenie Birnbauma–Orlicza dołączył Vladimir Mazya – zob. książkę [96, str. 157], informując mnie osobiście, że znalazł taką nazwę w Internecie. Zdziwienie jednak wzbudza fakt dowierzania Wikipedii, bez sprawdzania zawartości prac [12, 107, 109] (Mazya cytuje tylko pierwszą z nich). Nie zgadzam się z tym stwierdzeniem, gdyż Birnbaum i Orlicz w pierwszej wspólnej pracy poprawili błąd J. C. Burkilla (z 1928 roku) o aproksymacji funkcjami ciągłymi dodając warunek Δ_2 , natomiast w pracy [12] rozważają oni uogólnienie twierdzenia Landaua i nie ma tam żadnej przestrzeni. Birnbaum i Orlicz nie definiowali ani nie analizowali żadnej przestrzeni. Jest tu jednak wiele wyników przydatnych później w teorii przestrzeni Orlicza, jak choćby wspomniana funkcja dopełniająca. Gdyby trzymać się takiej retoryki, to wtedy można by te przestrzenie nazywać przestrzeniami Kaczmarza–Nikliborca, gdyż to oni już w 1928 roku w pracy [50] badali zbieżność $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 M(|f_n(x) - f(x)|) dx = 0$. Przestrzeń Orlicza pojawiła się po raz pierwszy w pracy Orlicza [107] z 1932 roku z założeniem warunku Δ_2 , a w pracy [109] z 1936 roku bez tego założenia. Nie Panowie! *Przestrzenie Orlicza to nie przestrzenie Birnbauma–Orlicza, ale po prostu przestrzenie Orlicza!*

wprowadzić moduł pod znak całki, tzn.

$$\|f\|_M^0 = \sup \left\{ \int_a^b |f(x)g(x)| dx : I_{M^*}(g) \leq 1 \right\}.$$

Orlicz udowodnił w pracy [109] (zob. też książkę [153, str. 95–97]), że przestrzeń Orlicza $L^M[a, b]$ ma naturalny opis

$$L^M = \left\{ f \in L^0 : \int_a^b M\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx < \infty \text{ dla pewnego } \lambda = \lambda(f) > 0 \right\}.$$

Termin *przestrzeń Orlicza* pojawił się po raz pierwszy w pracy Morse'a i Transue'a [101] z 1950 roku i następnie w książce A. C. Zaanena [151] z 1953 roku. Termin ten został ugruntowany, zwłaszcza po ukazaniu się monografii M. A. Krasnoselskiego i J. B. Rutickiego [54] z 1958 roku, a szczególnie jej angielskiego tłumaczenia z 1961 roku.

Dla dowolnej przestrzeni miary (Ω, Σ, μ) i dowolnej wypukłej funkcji Younga $M: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, tzn. ciągłej i niemalejącej funkcji spełniającej warunek $M(0) = 0$, przestrzeń Orlicza definiuje się następująco:

$$L^M = L^M(\Omega) = \{f \in L^0(\Omega) : I_M(f/\lambda) < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}.$$

Staje się ona przestrzenią Banacha z każdą z dwóch równoważnych norm (zob. artykuły [86, 91]): *normą Luxemburga–Nakano* (Nakano 1950, Luxemburg 1955)

$$\|f\|_M = \inf \{ \lambda > 0 : I_M(f/\lambda) \leq 1 \}$$

lub *normą Orlicza* (Orlicz 1932, 1936)

$$\|f\|_M^0 = \sup \left\{ \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx : \int_{\Omega} M^*(|g(x)|) dx \leq 1 \right\}.$$

Obie te normy można też wyrazić równoważnie (w postaci Amemiya) dla funkcji $f \in L^M(\Omega)$:

$$\|f\|_M^0 = \inf_{k>0} \frac{1 + I_M(kx)}{k}, \quad \|f\|_M = \inf_{k>0} \frac{\max(1, I_M(kx))}{k}.$$

Pierwsza równość pochodzi z pracy [112], natomiast drugą wykazali niezależnie Shragin w pracy [137] oraz Hudzik i Maligranda w pracy [43]. Praca Shragina nie była nam znana, gdyż została opublikowana w niedostępnym czasopiśmie i dopiero w 2009 roku Shragin podarował mi jej kopię.

G. G. Lorentz w swojej książce o wielomianach Bernsteina [66, str. 31–33, 80] używa twierdzenia 4.1 pochodzącego od Orlicza oraz uogólnia je na przestrzenie symetryczne na $[0, 1]$ dla operatorów całkowych.

Przestrzeń Banacha funkcji mierzalnych $E = (E, \|\cdot\|_E)$ na $I = [0, 1]$ jest *symetryczna*, jeżeli: (a) jest *idealna*, tzn. jeżeli $f \in L^0$, $g \in E$ i $|f(x)| \leq |g(x)|$ dla prawie wszystkich $x \in I$, to $f \in E$ i $\|f\|_E \leq \|g\|_E$ oraz (b) $f \in L^0$, $g \in E$ i równość

$$m(\{x \in I : |f(x)| > \lambda\}) = m(\{x \in I : |g(x)| > \lambda\})$$

dla każdego $\lambda > 0$ implikuje, że $f \in E$ oraz $\|f\|_E = \|g\|_E$.

Oczywiście przestrzenie Orlicza są symetryczne. Innymi przestrzeniami symetrycznymi są przestrzenie Marcinkiewicza M_φ oraz przestrzenie Lorentza Λ_φ i $\Lambda_{p,\varphi}$, gdy $1 \leq p < \infty$, które po raz pierwszy badano w latach pięćdziesiątych.

Twierdzenie interpolacyjne Orlicza (twierdzenie 4.1) zostało w ostatecznej formie udowodnione dla przestrzeni symetrycznych przez B. S. Mitjagina oraz A. P. Calderóna (zob. prace [20, 99]) i obecnie nazwane jest twierdzeniem interpolacyjnym Calderóna–Mitjagina.

Twierdzenie 4.2 (Mitjagin 1965, Calderón 1966). *Założmy, że $L^\infty \subset E \subset L^1$. Przestrzeń E jest interpolacyjna między L^1 i L^∞ dla operatorów liniowych ze stałą 1 wtedy i tylko wtedy, gdy E jest symetryczna i ma własność MP (ang. majorant property), tj. jeżeli*

$$\int_0^x f^*(t) dt \leq \int_0^x g^*(t) dt$$

dla każdego $x > 0$ i $g \in E$, to $f \in E$ oraz $\|f\|_E \leq \|g\|_E$, gdzie „funkcje gwiazdkowe” (ang. rearrangements) dane są wzorem

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : m(\{x \in I : |f(x)| > \lambda\}) < t\}$$

i podobnie g^* .

Przestrzenie symetryczne ośrodkowe oraz symetryczne z własnością Fatou mają własność MP. Dowód twierdzenia 4.2 i przykłady przestrzeni $E \in MP$ możemy znaleźć w książce [57] (oraz w książkach [10, 61]). G. I. Russu w pracy [127] podał przykład przestrzeni symetrycznej, która nie ma własności MP (zob. książkę [57, str. 122–124]).

Przykład 4.1. Przykłady przestrzeni niesymetrycznych $E = E[0, 1]$ mających własność Fatou i takich, że $L^\infty \subset E \subset L^1$.

1. (Przestrzeń Korenblyuma–Kreina–Levina 1948). Przestrzeń K wyznaczona przez normę

$$\|f\|_K = \sup_{0 < x \leq 1} \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt,$$

jest niesymetryczna, gdyż dla $f_0(x) = (1-x)^{-1/2}$ i $x \in [0, 1)$ mamy $\|f_0\|_K = 2$, natomiast $f_0^*(x) = x^{-1/2}$ i $\|f_0^*\|_K = \infty$.

2. (Wagowe przestrzenie L^p). Dla $p \in [1, \infty)$ niech $E = L^p_{x^{-1/2}}$ z normą

$$\|f\|_E = \left(\int_0^1 |f(x)|^p d\sqrt{x} \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2} \int_0^1 |f(x)|^p x^{-1/2} dx \right)^{1/p}.$$

Przestrzeń jest niesymetryczna, gdyż dla $f_0(x) = (1-x)^{-1/(2p)} \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x)$ mamy $\|f_0\|_E = \sqrt{\pi}/2$ oraz $f_0^*: x \mapsto x^{-1/(2p)} \chi_{(0, \frac{1}{2}]}(x) \notin E$.

3. Niech $E = L^2[0, \frac{1}{2}] + L^4[\frac{1}{2}, 1]$. Wtedy zachodzą inkluzje $L^\infty \subset L^4[0, 1] \subset E \subset L^2[0, 1] \subset L^1[0, 1]$ i przestrzeń E jest niesymetryczna, gdyż dla $f_0(x) = x^{-1/3}$, gdzie $x \in (0, 1)$, mamy $f_0 \in E$, ale $f_0^*: x \mapsto (1-x)^{-1/2} \notin E$.

Zauważmy, że we wszystkich powyższych trzech przypadkach operator liniowy

$$Tf(x) = f(1-x), \quad x \in I,$$

jest ograniczony w L^1 i w L^∞ z normami 1, ale nie jest ograniczony w E , gdyż $Tf_0 = f_0^* \notin E$.

W 1954 roku Orlicz w pracy [111] rozszerzył swój rezultat z 1934 roku, wykazując twierdzenie 4.1 dla wszystkich przestrzeni Orlicza oraz dla operatorów Lipschitza.

Twierdzenie 4.3 (Orlicz 1954).

1° Jeżeli $T: L^1[a, b] \rightarrow L^1[a, b]$ jest operatorem Lipschitza oraz $T: L^\infty[a, b] \rightarrow L^\infty[a, b]$ jest ograniczony, tzn.

$$\|Tf\|_\infty \leq M_\infty \|f\|_\infty \quad \text{dla dowolnej funkcji } f \in L^\infty[a, b],$$

to wtedy operator $T: L^M[a, b] \rightarrow L^M[a, b]$ jest ograniczony, zachodzą nierówności $I_M\left(\frac{Tf}{\max(M_1, M_\infty)}\right) \leq I_M(f)$ oraz

$$\|Tf\|_M \leq \max(M_1, M_\infty) \|f\|_M \quad \text{dla dowolnej funkcji } f \in L^M[a, b].$$

2° Każda przestrzeń Orlicza $L^M[a, b]$ jest interpolacyjna między $L^1[a, b]$ i $L^\infty[a, b]$ dla operatorów Lipschitza oraz

$$\|T\|_{\text{Lip}(L^M)} \leq \max(\|T\|_{\text{Lip}(L^1)}, \|T\|_{\text{Lip}(L^\infty)}).$$

Ponownie w oryginalnym sformułowaniu obu punktów powyższego twierdzenia, po prawej stronie kończących nierówności, występuje w miejsce 1 stała $K_M > 1$. Dowody ze stałą 1 zostały podane w pracach [78, 81].

Przykład 4.2 [80, str. 126]. Niech operator $T: L^1(I) \rightarrow L^1(I)$ będzie określony wzorem

$$Tf(t) = f^*(t), \quad t \in I := [0, 1].$$

Operator T nie jest punktowo C -subaddytywny, gdyż definiując $f(t) = 1 - t$ i $g(t) = t$ otrzymujemy $f^*(t) = g^*(t) = 1 - t$. W takiej sytuacji oszacowanie $|T(f + g)(t)| \leq C(|Tf(t)| + |Tg(t)|)$ dla prawie wszystkich $t \in I$ oznacza nierówność $(f + g)^*(t) \leq C(f^*(t) + g^*(t))$, czyli $1 \leq 2C(1 - t)$, co jest niemożliwe przy $t \rightarrow 1^-$. Operator T jest natomiast nierozszerzający (Lipschitza z normą 1) w $L^1(I)$ i w $L^\infty(I)$. Faktycznie, gdy $f, g \in L^\infty(I)$, to nierówność

$$|f(t)| \leq |g(t)| + |f(t) - g(t)| \leq |g(t)| + \|f - g\|_\infty$$

daje oszacowanie $f^*(t) \leq g^*(t) + \|f - g\|_\infty$ i podobnie $g^*(t) \leq f^*(t) + \|f - g\|_\infty$, a zatem $|f^*(t) - g^*(t)| \leq \|f - g\|_\infty$ dla $t \in I$, czyli

$$\|f^* - g^*\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty \quad \text{dla dowolnych } f, g \in L^\infty(I).$$

Gdy teraz $f, g \in L^1(I)$, to

$$\int_I |f^*(t) - g^*(t)| dt = \int_I [f^*(t) - g^*(t)]_+ dt + \int_I [g^*(t) - f^*(t)]_+ dt$$

oraz

$$\begin{aligned} \int_I [f^*(t) - g^*(t)]_+ dt &= \int_{\{t \in I: f^*(t) \geq g^*(t)\}} [f^*(t) - g^*(t)] dt \leq \\ &\leq \int_{\{t \in I: f^*(t) \geq g^*(t)\}} [\max(|f|, |g|)^*(t) - g^*(t)] dt \leq \\ &\leq \int_I [\max(|f|, |g|)^*(t) - g^*(t)] dt = \\ &= \int_I \max(|f(t)|, |g(t)|) dt - \int_I |g(t)| dt = \\ &= \int_I [|f(t)| - |g(t)|]_+ dt, \end{aligned}$$

i analogicznie $\int_I [g^*(t) - f^*(t)]_+ dt \leq \int_I [|g(t)| - |f(t)|]_+ dt$, a zatem

$$\begin{aligned} \|f^* - g^*\|_1 &\leq \int_I [|f(t)| - |g(t)|]_+ dt + \int_I [|g(t)| - |f(t)|]_+ dt = \\ &= \int_I ||f(t)| - |g(t)|| dt \leq \int_I |f(t) - g(t)| dt = \|f - g\|_1. \end{aligned}$$

Twierdzenie interpolacyjne 4.3 Orlicza dla operatorów Lipschitza było uogólniane przez Shimogakiego, Lorentza i Shimogakiego, Browdera, Maligrandę oraz Bastero i Ruiza (zob. prace [7, 16, 67–69, 71–74, 78, 81, 136]).

Twierdzenia Orlicza 4.2 i 4.3 2°, z dodatkowymi założeniami o operatorze i bez cytowania prac Orlicza, udowadniali następnie Garsia w książce [35, Proposition 3.1.1, str. 56] przy założeniach, że T jest dodatni i liniowy, Brézis i Strauss w artykule [15, Lemma 5], Crandall i Tartar w pracy [27, Proposition 4, str. 389] przy założeniu, że T jest dodatni oraz Krengel i Lin w artykule [58, Theorem 2.5, str. 173] przy założeniu, że T jest monotoniczny (tzn. $f \leq g \Rightarrow Tf \leq Tg$).

Trzecie twierdzenie interpolacyjne Orlicza [110], udowodnione w 1954 roku, dotyczy przestrzeni nieidealnych.

Niech $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ będzie ciągłą, rosnącą, wklęsłą funkcją przyjmującą wartość zero jedynie w zerze. Przestrzeń $H^\omega = H^\omega(I)$, gdzie $I = [0, 1]$ (przestrzeń funkcji spełniających warunek Höldera na I) zawiera funkcje ciągłe na I , dla których poniższy funkcjonal jest skończony

$$p_\omega(f) = \sup_{\substack{x, y \in I \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)}.$$

Przestrzeń H^ω jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|f\|_\omega = \sup_{x \in I} |f(x)| + p_\omega(f) = \|f\|_C + p_\omega(f).$$

Jeśli $\omega(t) = t^\alpha$, przy czym $0 < \alpha \leq 1$, to piszemy w skrócie H^α i $\|\cdot\|_\alpha$.

Twierdzenie 4.4 (Orlicz 1954). *Przestrzeń $H^\omega[0, 1]$ jest przestrzenią interpolacyjną między $C[0, 1]$ i $H^1[0, 1]$ dla operatorów liniowych oraz*

$$\|T\|_{H^\omega} \leq [2 + \max(1, 1/\omega(1))] \max(\|T\|_C, \|T\|_{H^1}). \quad (11)$$

Oszacowanie (11) pochodzi z pracy [81], gdyż Orlicz udowodnił je ze stałą $7 + 2/\omega(1)$, ale jego dowód obejmuje też przypadek wektorowy, tzn. wartości funkcji są przyjmowane w dowolnej przestrzeni Banacha X i twierdzenie ma postać: przestrzeń $H^\omega(I, X)$ jest interpolacyjna między $C(I, X)$ i $H^1(I, X)$ dla

operatorów liniowych. Dowód z pracy [81] obejmuje też przypadek wektorowy. Orlicz zauważył ponadto, że rezultat jest prawdziwy dla operatorów nieliniowych ograniczonych.

Twierdzenie 4.4 nie jest nigdzie cytowane w literaturze matematycznej, choć było pierwszym twierdzeniem interpolacyjnym nie dotyczącym przestrzeni Banacha funkcji mierzalnych. Analogiczne badania wiele lat później prowadzili R. O’Neil, E. M. Semenov i J. Peetre, który zauważył, że $H^\alpha \in \text{Int}_1(C, H^1)$ (zob. prace [105, 113, 133]).

5. Twierdzenia interpolacyjne Marcinkiewicza

Rozważmy dwa klasyczne operatory, operator Hardy’ego i operator maksymalny.

1. Operator Hardy’ego

$$Hf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x \in I,$$

przy czym $I = (0, a)$ oraz $0 < a \leq \infty$. Operator H nie jest ograniczony z $L^1(I)$ w $L^1(I)$ (na przykład, $f_0: x \mapsto \frac{1}{x \ln^2 x} \chi_{(0, \frac{1}{2})} \in L^1(I)$, podczas gdy $Hf_0(x): x \mapsto -1/(x \ln x) \notin L^1(I)$), ale jest ograniczony z $L^1(I)$ w słabą $L^1(I)$ i jest ograniczony z $L^\infty(I)$ w $L^\infty(I)$.

2. Operator maksymalny

$$Mf(x) = \sup_{J \ni x} \frac{1}{|J|} \int_J |f(t)| dt, \quad J = (a, b) \subset I = [0, 1]$$

nie jest ograniczony z $L^1(I)$ w $L^1(I)$, ale jest ograniczony z $L^1(I)$ w słabą $L^1(I)$ i jest ograniczony z $L^\infty(I)$ w $L^\infty(I)$.

Takich przykładów operatorów jest więcej i Marcinkiewicz – znając twierdzenie interpolacyjne Riesz–Thorina oraz znając rezultat Kołmogorowa o tym, że operacja brania funkcji sprzężonej jest słabego typu $(1, 1)$ – próbował udowodnić podobne twierdzenie nie tylko dla skali przestrzeni L^p . Szczególna wersja twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza (1939) ma następującą postać.

Twierdzenie. *Jeśli odwzorowanie liniowe lub subliniowe T jest słabego typu $(1, 1)$ i mocnego typu (∞, ∞) , tzn. spełnia oszacowania*

$$\lambda m(\{x \in I : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq A \int_I |f(x)| dx$$

dla $f \in L^1(I)$ i dla dowolnego $\lambda > 0$ oraz

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in I} |Tf(x)| \leq B \operatorname{ess\,sup}_{x \in I} |f(x)|$$

dla $f \in L^\infty(I)$, to jest też mocnego typu (p, p) dla $p \in (1, \infty]$, tzn. spełnia oszacowanie

$$\int_I |Tf(x)|^p dx \leq C_{A,B} \int_I |f(x)|^p dx$$

dla $f \in L^p(I)$, przy czym

$$C_{A,B}^{1/p} \leq \frac{2}{(p-1)^{1/p}} A^{1/p} B^{1-1/p}.$$

Aby zrozumieć znaczenie twierdzenia Marcinkiewicza potrzebne jest zdefiniowanie tzw. słabych przestrzeni L^p . Badając ograniczoność operatorów Marcinkiewicza potrzebował przestrzeni większych niż L^p , tzw. słabych przestrzeni L^p oznaczanych obecnie przez $L^{p,\infty}$ ($0 < p < \infty$). Nazywa się je często *przestrzeniami Marcinkiewicza* i rozpatruje z quasi-normą (mającą dwie postaci):

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) = \sup_{\lambda>0} \lambda \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\})^{1/p}. \quad (12)$$

Zauważmy, że przestrzenie te są większe od L^p , gdyż dla $f \in L^p$ i dowolnego $\lambda > 0$ zachodzą nierówności

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \geq \int_{\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}} |f(x)|^p d\mu \geq \lambda^p \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}),$$

czyli

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{\lambda>0} \lambda \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\})^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} = \|f\|_p.$$

Marcinkiewicz w 1939 roku, w dwustronicowej pracy [93], sformułował poniższe twierdzenie, ale bez dowodu, który został opublikowany przez Zygmunda w 1956 roku w [154] wraz z informacją, że ów dowód otrzymał od Marcinkiewicza w jednym z listów. Dlatego też twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza bywa czasami nazywane twierdzeniem interpolacyjnym Marcinkiewicza–Zygmunda. Dowód podali również doktoranci Zygmunda – Mischa Cotlar dla $p_0 = q_0$ i $p_1 = q_1$ (praca doktorska z 1953 roku, opublikowana w 1956 roku jako artykuł [25]) oraz William J. Riordan w przypadku $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$, $i = 0, 1$ (praca doktorska z 1955 roku, nieopublikowana).

Twierdzenie 5.1 (Marcinkiewicz 1939, Zygmund 1956). *Założmy, że $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ i dla $\theta \in (0, 1)$ określmy p i q równościami*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \quad (13)$$

Jeżeli $p_0 \leq q_0$ i $p_1 \leq q_1$ (dolny trójkąt) oraz $q_0 \neq q_1$ (wykluczamy poziomy odcinek), to z ograniczoności dowolnego liniowego lub subliniowego operatora $T: L^{p_0} \rightarrow L^{q_0, \infty}$ i $T: L^{p_1} \rightarrow L^{q_1, \infty}$ (tzn. założenia, że T jest słabego typu (p_0, q_0) i słabego typu (p_1, q_1)) wynika ograniczoność $T: L^p \rightarrow L^q$ (tzn. T ma mocny typ (p, q)) oraz

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq C \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{q_0, \infty}}^{1-\theta} \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{q_1, \infty}}^{\theta},$$

gdzie

$$C = C(\theta, p_0, p_1, q_0, q_1) \leq \frac{2}{\left[\left|\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}\right|\theta(1-\theta)\right]^{1/q}}.$$

4. Twierdzenie Marcinkiewicza jest prawdziwe w dolnym trójkącie.

$$S_0 = \left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right), S_1 = \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right), M = \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \text{ i } q_0 \neq q_1, \\ \text{tzn. oprócz poziomych odcinków.}$$

Zygmund w pracy [154, str. 228, przypis] pisze o wykorzystanej przez siebie idei dowodu twierdzenia 5.1 dla operatorów słabego typu $(1, 1)$ i $(2, 2)$, zawartej w liście Marcinkiewicza z czerwca 1939 roku. Stąd w swojej monografii z 1959 roku nazywa twierdzenie 5.1 twierdzeniem interpolacyjnym Marcinkiewicza (zob. książkę [155, Rozdział XII, Tw. 4.6, str. 112]).

Niewątpliwie umieszczenie rezultatu Marcinkiewicza w pracy Zygmun- da [154], a szczególnie w jego książce [155], rozpowszechniło go wśród specja- listów i pozwoliło zrozumieć jego znaczenie, w tym głębokie konsekwencje i zastosowania. Ponadto nadana przez Zygmun- da nazwa *twierdzenie interpola-*

cyjne Marcinkiewicza została powszechnie zaakceptowana (już wczesne prace, jak na przykład [11, 20, 26, 45, 46, 104, 124, 132, 139, 142], mają tę nazwę w tytule) i doskonale upamiętnia autora tego twierdzenia.

Szczególne przypadki twierdzenia 5.1 mają następującą postać.

Twierdzenie 5.2 (twierdzenie Marcinkiewicza, przypadek diagonalny). *Jeżeli $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ i T jest dowolnym liniowym lub subliniowym operatorem słabego typu (p_0, p_0) i słabego typu (p_1, p_1) (przy czym dla $p_1 = \infty$ przyjmujemy mocny typ (∞, ∞)), tzn. $T: L^{p_0} \rightarrow L^{p_0, \infty}$ i $T: L^{p_1} \rightarrow L^{p_1, \infty}$ jest ograniczony, to jest on mocnego typu (p, p) , tzn. $T: L^p \rightarrow L^p$ jest ograniczony oraz*

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq 2 \left(\frac{p}{p-p_0} - \frac{p}{p_1-p} \right)^{1/p} \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{p_0, \infty}}^{1-\theta} \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{p_1, \infty}}^{\theta}. \quad (14)$$

Uwaga 5.1. Jeśli operator T w powyższym twierdzeniu jest słabego typu (p_0, p_0) i mocnego typu (p_1, p_1) , to oczywiście jest mocnego typu (p, p) , ale otrzymamy lepsze niż w nierówności (14) oszacowanie na normę

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq 2 \left(\frac{p}{p-p_0} \right)^{1/p} \|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{p_0, \infty}}^{1-\theta} \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{p_1}}^{\theta}.$$

Twierdzenie (małe twierdzenie Marcinkiewicza). *Jeżeli $1 < p \leq \infty$ i T jest dowolnym liniowym lub subliniowym operatorem słabego typu $(1, 1)$ i mocnego typu (∞, ∞) , tzn. $T: L^1 \rightarrow L^{1, \infty}$ i $T: L^\infty \rightarrow L^\infty$ jest ograniczony, to jest on mocnego typu (p, p) , tzn. $T: L^p \rightarrow L^p$ jest ograniczony oraz*

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq \frac{2}{(p-1)^{1/p}} \|T\|_{L^1 \rightarrow L^{1, \infty}}^{1/p} \|T\|_{L^\infty \rightarrow L^\infty}^{1-1/p}.$$

Naturalne jest pytanie o prawdziwość twierdzenia odwrotnego. Okazuje się jednak, że istnieją operatory, zarówno subliniowe jak i liniowe, ograniczone w L^p dla wszystkich $p \in (1, \infty]$, które nie są słabego typu $(1, 1)$. Przykładowo, takim operatorem subliniowym jest dwu- lub więcej wymiarowy silny operator maksymalny (uśrednienie i supremum są brane po prostokątach), a operatorem liniowym – operator liniowy mający powyższy operator subliniowy jako majoryzujący.

Twierdzenie 5.3 (twierdzenie Marcinkiewicza w przestrzeniach Orlicza 1939). *Założmy, że $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$ i niech T będzie dowolnym liniowym lub subliniowym operatorem słabego typu (p_0, p_0) i słabego typu (p_1, p_1) , tzn. $T: L^{p_0} \rightarrow$*

$L^{p_0, \infty}$ i $T: L^{p_1} \rightarrow L^{p_1, \infty}$ będzie ograniczony. Jeżeli wypukła funkcja Younga M spełnia nierówności

$$\int_0^u t^{-p_0-1} M(t) dt \leq A u^{-p_0} M(u) \quad \forall u > 0, \quad (15)$$

$$\int_u^\infty t^{-p_1-1} M(t) dt \leq B u^{-p_1} M(u) \quad \forall u > 0, \quad (16)$$

to operator $T: L^M \rightarrow L^M$ jest ograniczony oraz

$$\|T\|_{L^M \rightarrow L^M} \leq C \max(\|T\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{p_0, \infty}}, \|T\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{p_1, \infty}}).$$

Marcinkiewicz przyjmuje w pracy [93] jeszcze trzecie założenie, że $M \in \Delta_2$, ale jest ono zbędne, gdyż wynika z nierówności (16), a mianowicie (zob. artykuł [77, str. 43]):

$$\begin{aligned} M(2u) &= C_{p_1} u^{p_1} M(2u) \int_{2u}^{4u} t^{-p_1-1} dt \leq C_{p_1} u^{p_1} \int_{2u}^\infty t^{-p_1-1} M(t) dt \leq \\ &\leq C_{p_1} u^{p_1} \int_u^\infty t^{-p_1-1} M(t) dt \leq C_{p_1} B M(u). \end{aligned}$$

Nierówności całkowe (15) i (16) są równoważne nierównościom $p_0 < \alpha_M \leq \beta_M < p_1$ na indeksy Matuszewskiej–Orlicza, gdzie

$$\alpha_M = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln \overline{M}(t)}{\ln t}, \quad \beta_M = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \overline{M}(t)}{\ln t} \quad \text{oraz} \quad \overline{M}(t) = \sup_{u>0} \frac{M(tu)}{M(u)}.$$

Indeksy Matuszewskiej–Orlicza zostały wprowadzone w 1960 roku w pracy [95], a równoważność odpowiednich nierówności całkowych (15–16) i nierówności na indeksy $p_0 < \alpha_M \leq \beta_M < p_1$ udowodniono w pracy [77, Theorem 6.4] (zob. też książkę [80, Theorem 11.8]). Tutaj też pokazano wspomnianą równoważność w przypadkach, gdy istotne jest zachowanie się funkcji M dla dużych lub małych argumentów, tzn. gdy rozważamy przestrzenie Orlicza nad miarą skończoną lub miarą liczącą (czyli ciągowe przestrzenie Orlicza).

Przyjmując w twierdzeniu 5.3 $p_1 = \infty$ i rozumiejąc słaby typ (∞, ∞) jako mocny typ (∞, ∞) otrzymamy tezę, rezygnując z założenia (16) (wystarczy warunek (15)). Warto też zwrócić uwagę na szereg konsekwencji wynikających z nierówności między indeksami.

Wniosek 5.4 (Gallardo 1988 [34]). *Jeżeli dowolny liniowy lub subliniowy operator T jest słabego typu $(1,1)$ i mocnego typu (∞, ∞) oraz $M^* \in \Delta_2$, to $T: L^M \rightarrow L^M$ jest ograniczony.*

Wniosek 5.5 (Ryan 1963 [129]). *Jeżeli operator liniowy lub subliniowy $T: L^p \rightarrow L^p$ jest ograniczony dla każdego $p \in (1, \infty)$, to T jest też ograniczony w każdej refleksywnej przestrzeni Orlicza.*

Uogólnienia twierdzeń Marcinkiewicza 5.1 i 5.3 na przestrzenie Orlicza uzyskali m.in. Riordan, Zygmund, Simonenko, Koizumi, Torchinsky, Strömberg, Maligranda, Rao i Ren, Heinig i Maligranda, Miyamoto oraz Cianchi (zob. książki [118, 155] oraz prace [24, 40, 53, 77, 100, 123, 138, 143, 148, 154]).

Odnotujmy, że Marcinkiewicz, w ostatnich dwóch wierszach pracy [93], napisał: *dowody tych twierdzeń ukazać się w kolejnej serii* (chodziło o twierdzenia 5.1–5.3 oraz o twierdzenia o ograniczoności funkcji sprzężonej w przestrzeniach Orlicza). Niestety, Marcinkiewicz nigdy ich nie opublikował – we wrześniu 1939 roku dostał się do niewoli radzieckiej i przebywał w obozie w Starobielsku. W kwietniu lub maju 1940 został zamordowany w Charkowie. Pochowany jest (prawdopodobnie) w zbiorowej mogile w Piatichatkach (zob. artykuł [85, str. 147]). Niestety, nigdy już nie poznamy oryginalnych dowodów Marcinkiewicza.

W związku z twierdzeniami interpolacyjnymi Marcinkiewicza warto odnotować następujące uwagi (zob. też prace [85, 87]).

1. Marcinkiewicz był prawdopodobnie pierwszą osobą, która użyła słowa „interpolacja operatorów” w tym właśnie kontekście. Riesz i Thorin mówili „twierdzenia o wypukłości” (zob. też prace [13, str. 23; 42, str. 618; 114, str. 39]).

2. Dowód twierdzenia Marcinkiewicza opiera się na odpowiednim rozkładzie funkcji, co w latach sześćdziesiątych pozwoliło wprowadzić koncepcję K -funkcjonału odgrywającego ważną rolę we współczesnej teorii interpolacji.

3. Nie jest prawdą, jak piszą niektórzy, że Marcinkiewicz zawarł w swojej pracy jedynie przypadek diagonalny. Marcinkiewicz uzyskał przypadek ogólny, a relację (13) przedstawił wzorem

$$\frac{q - q_0}{q_1 - q} = \frac{q_0 p_1}{p_0 q_1} \cdot \frac{p - p_0}{p_1 - p}.$$

Benedek, Murphy i Panzone wręcz nazywają przypadek diagonalny twierdzeniem Marcinkiewicza, a przypadek ogólny twierdzeniem Marcinkiewicza–Zygmunda (zob. książkę [9, str. 2 i 5]). Ponadto, u Marcinkiewicza drugie twierdzenie sformułowane jest nawet dla przestrzeni Orlicza i w tej sytuacji

dotyczy ono przypadku diagonalnego. Przypuśćmy, że operator liniowy lub subliniowy $T: L^{p_0} \rightarrow L^{p_0, \infty}$ i $T: L^{p_1} \rightarrow L^{p_1, \infty}$ jest ograniczony, a funkcja $M: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest ciągła, rosnąca, przyjmuje wartość zero tylko w zerze oraz spełnia następujące trzy warunki:

$$\begin{aligned} M(2u) &= O(M(u)), \\ \int_1^u t^{-p_0-1} M(t) dt &= O(u^{-p_0} M(u)), \\ \int_u^\infty t^{p_1-1} M(t) dt &= O(u^{-p_1} M(u)), \quad \text{gdy } u \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Wtedy dla takiej funkcji f , że $M(|f|) \in L^1[0, 1]$, otrzymujemy

$$\int_0^1 M(|Tf(x)|) dx \leq C \int_0^1 M(|f(x)|) dx + C,$$

gdzie C jest niezależna od f (zob. książkę [155, Theorem 4.22]).

4. Twierdzenia Marcinkiewicza są sformułowane i udowodnione dla operatorów punktowo quasi-addytywnych, co oznacza, że istnieje taka stała $\gamma \geq 1$, że dla dowolnych funkcji mierzalnych f, g zachodzi μ -prawie wszędzie na Ω nierówność

$$|T(f+g)(x)| \leq \gamma(|Tf(x)| + |Tg(x)|).$$

Oczywiście wtedy stała γ musi być dopisana w oszacowaniach norm operatorów.

5. Stała w twierdzeniu 5.1 dąży do nieskończoności, gdy $\theta \rightarrow 0^+$ lub $\theta \rightarrow 1^-$.

6. Twierdzenie Marcinkiewicza jest prawdziwe, gdy $p \leq q$ i $q_0 \neq q_1$, tzn. jeden punkt może być w górnym trójkącie, jeśli tylko punkt M (zob. rysunek 4) należy do dolnego trójkąta. Dowód tej wersji twierdzenia podali: Calderón, Lions i Peetre, Hunt i Krée (zob. prace [20, 44, 55, 63]). Berenstein, Cotlar, Kerzman i Krée wykazali w artykule [11], że jeżeli twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza zachodzi dla odcinka S_0S_1 , to zachodzi ono też dla odcinka otrzymanego z obrotu S_0S_1 wokół M (oprócz odcinków poziomych i pionowych).

7. Twierdzenie Marcinkiewicza jest fałszywe w górnym trójkącie dla operatorów liniowych, tzn. gdy $p_0 > q_0$ i $p_1 > q_1$, a odpowiedni kontrprzykład podał Hunt w pracy [44]. On też zauważył, że twierdzenie 5.1 pozostaje prawdziwe (dla operatorów punktowo quasi-addytywnych) nawet w całej pierwszej ćwiartce $0 < p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ przy założeniach $p \leq q$ i $q_0 \neq q_1$ (zob. artykuł [44, str. 807]).

8. Stein i Weiss uogólnili w pracy [139] twierdzenie Marcinkiewicza zastępując przestrzeń L^{p_i} w dziedzinie operatora przez mniejsze przestrzenie Lorentza $L^{p_i,1}$, gdzie $i = 0, 1$ (podkreślić należy, że zakładają oni prawdziwość oszacowań w twierdzeniu Marcinkiewicza tylko dla funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych). Zatem, jeżeli $p_i \leq q_i$ i $p_i \neq \infty$ dla $i = 0, 1$ oraz $q_0 \neq q_1$, to ograniczoność $T: L^{p_0,1} \rightarrow L^{q_0,\infty}$ i $T: L^{p_1,1} \rightarrow L^{q_1,\infty}$ implikuje ograniczoność $T: L^p \rightarrow L^q$.

9. Z twierdzeń reiteracyjnych rzeczywistej metody interpolacyjnej otrzymujemy następującą *uogólnioną wersję twierdzenia Marcinkiewicza*.

Twierdzenie. *Jeżeli quasi-liniowe operatory $T: L^{p_0,1} \rightarrow L^{q_0,\infty}$ i $T: L^{p_1,1} \rightarrow L^{q_1,\infty}$ są ograniczone, to jest ograniczone odwzorowanie $T: L^{p,r} \rightarrow L^{q,r}$ dla każdego $r \in [1, \infty]$. W szczególności, ograniczony jest operator $T: L^p \rightarrow L^{q,p}$.*

Jeżeli mamy sytuację taką jak w twierdzeniu Marcinkiewicza, czyli $p_0 \leq q_0$ i $p_1 \leq q_1$, to $L^{q,p} \hookrightarrow L^q$.

10. Bardzo ważny krok w badaniu problematyki powiązanej z twierdzeniem Marcinkiewicza uczynił Calderón. W artykule [20] wprowadził on operator maksymalny, tzn. udowodnił, że jeśli operator $T: L^{p_0,1} \rightarrow L^{q_0,\infty}$ i $T: L^{p_1,1} \rightarrow L^{q_1,\infty}$ jest ograniczony, to $(Tf)^*(t) \leq CS_\sigma(f^*)(t)$ dla wszystkich $t > 0$, gdzie S_σ jest maksymalnym operatorem Calderóna

$$\begin{aligned} S_\sigma f(t) &= \int_0^\infty f(s) \min \left\{ \frac{s^{1/p_0}}{t^{1/q_0}}, \frac{s^{1/p_1}}{t^{1/q_1}} \right\} \frac{ds}{s} = \\ &= t^{-1/q_0} \int_0^{t^m} s^{1/p_0-1} f(s) ds + t^{-1/q_1} \int_{t^m}^\infty s^{1/p_1-1} f(s) ds, \end{aligned}$$

z odcinkiem $\sigma = [(1/p_0, 1/q_0), (1/p_1, 1/q_1)]$ i jego nachyleniem wynoszącym $m = (1/q_0 - 1/q_1)/(1/p_0 - 1/p_1)$, gdzie $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$ i $q_0 \neq q_1$. Aby uzyskać twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza, wystarczy zbadać ograniczoność dwóch ostatnich operatorów typu Hardy'ego, których sumą jest S_σ .

11. Twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza zostało udowodnione dla przestrzeni symetrycznych przez Boyda w pracy [14]. Ma ono następującą postać.

Twierdzenie. *Jeżeli $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$, E jest przestrzenią symetryczną na przedziale $I = [0, 1]$ lub $I = [0, \infty)$ z własnością Fatou oraz operatory liniowe $T: L^{p_0,1} \rightarrow L^{p_0,\infty}$ i $T: L^{p_1,1} \rightarrow L^{p_1,\infty}$ są ograniczone, to $T: E \rightarrow E$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $1/p_1 < \alpha_E \leq \beta_E < 1/p_0$, gdzie liczby α_E, β_E są tzw.*

indeksami Boyda przestrzeni E określonymi wzorami

$$\alpha_E = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln \|\sigma_a\|_{E \rightarrow E}}{\ln a}, \quad \beta_E = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_a\|_{E \rightarrow E}}{\ln a}$$

$$\text{i } \sigma_a f(x) = f(x/a) \chi_I(x/a).$$

Krein, Petunin i Semenov [57] wykazali, że twierdzenie Boyda jest prawdziwe dla dowolnych przestrzeni symetrycznych (nawet bez własności Fatou). W szczególności, E jest interpolacyjna między L^{p_0} i L^{p_1} . Jeżeli $p_1 = \infty$, to jednostronne oszacowanie z góry indeksu przestrzeni symetrycznej E , tj. $\beta_E < 1/p_0$, gdzie $p_0 \in [1, \infty)$, implikuje, że E jest przestrzenią interpolacyjną między L^{p_0} i L^∞ (zob. pracę [74, Theorem 4.6], gdzie jest to udowodnione nawet dla operatorów Lipschitza). Ponadto, Astashkin i Maligranda udowodnili w artykule [2] jednostronne twierdzenie Boyda. Jeżeli przestrzeń symetryczna E ma własność Fatou lub jest ośrodkowa oraz $\alpha_E > 1/p_1$, gdzie $p_1 \in (1, \infty)$, to E jest przestrzenią interpolacyjną między L^1 i L^{p_1} .

12. Twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza nie jest prawdziwe dla dowolnych operatorów biliniowych bez dodatkowych założeń. Znane są dwa kontrprzykłady.

- Przykład Strichartza (zob. pracę [142]). Operator T jest określony wzorem

$$T(f, g)(x) = \int_0^\infty f(xt)g(t) dt.$$

Gdy $T: L^1 \times L^\infty \rightarrow L^{1,\infty}$ lub $T: L^2 \times L^2 \rightarrow L^{2,\infty}$, jest on ograniczony, ale gdy $T: L^p \times L^{p'} \rightarrow L^p$, jest on nieograniczony.

- Przykład Maligrandy (zob. pracę [79]). Operator S jest określony wzorem

$$S(f, g)(x) = \int_0^1 \int_0^1 f(s)g(t) \min\left(\frac{1}{st}, \frac{1}{x}\right) ds dt.$$

Gdy $S: L^1 \times L^1 \rightarrow L^{1,\infty}$ lub $T: L^2 \times L^2 \rightarrow L^{2,\infty}$, jest on ograniczony, ale $T: L^p \times L^p \rightarrow L^p$, nie jest ograniczony dla $p \in (1, 2]$.

Lions i Peetre, stosując rzeczywistą metodę interpolacji, wykazali w artykule [63] następujące twierdzenie o interpolacji biliniowej. Jeżeli operator biliniowy $T: L^{p_0} \times L^{q_0} \rightarrow L^{r_0,\infty}$ i $T: L^{p_1} \times L^{q_1} \rightarrow L^{r_1,\infty}$ jest ograniczony, to $T: L^p \times L^q \rightarrow L^r$ jest ograniczony, jeśli oprócz równości

$$\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}\right) = (1-\theta)\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}, \frac{1}{r_0}\right) + \theta\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}, \frac{1}{r_1}\right)$$

mamy ponadto $1/r \leq 1/p + 1/q - 1$.

Dalsze twierdzenia o interpolacji operatorów wieloliniowych można znaleźć w pracach Sharpleya, Zafrana, Jansona oraz Grafakosa i Kaltona (zob. prace [37, 49, 135, 152]).

13. Twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza dla przestrzeni ciągowych (oraz pewne jego analogie) podał Sargent w artykule [132].

14. W 1972 roku Y. Sagher zdefiniował *quasi-stożki Marcinkiewicza* związane z K -metodą interpolacji (zob. prace [85, str. 159; 87, str. 163]), a w 1978 roku Dmitriev i Krein uogólnili w artykule [29] twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza do operatorów odwzorowujących dowolną parę przestrzeni Banacha (A_0, A_1) w parę przestrzeni Marcinkiewicza $(M_{\varphi_0}^*, M_{\varphi_1}^*)$.

6. Funkcyjne i ciągowe przestrzenie Marcinkiewicza M_φ

Rozważania Marcinkiewicza doprowadziły do wyodrębnienia dwóch typów przestrzeni symetrycznych nazwanych obecnie *przestrzeniami Marcinkiewicza* (istnieje również trzecia przestrzeń Marcinkiewicza, niesymetryczna – zob. artykuły [85, str. 166–169; 87, str. 165–167]). Już wcześniej używaliśmy przestrzeni Marcinkiewicza $L^{p,\infty}$, przy czym $1 \leq p < \infty$, mówiąc o słabej przestrzeni L^p . Jej topologię zadaje jedna z quasi-norm postaci (12). Ten rodzaj przestrzeni łatwo można rozszerzyć. Niech $I = (0, 1)$ lub $I = (0, \infty)$ i niech $\varphi: I \cup \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ będzie dowolną taką funkcją wklęsłą, że $\varphi(0) = 0$ (można też rozpatrywać funkcję quasi-wklęsłą φ , tzn. spełniającą nierówność $\varphi(s) \leq \max(1, s/t)\varphi(t)$ dla dowolnych $s, t \in I$). Funkcyjna przestrzeń Marcinkiewicza M_φ^* na I składa się z tych $f \in L^0(I)$, dla których

$$\|f\|_\varphi^* = \sup_{t \in I} \varphi(t) f^*(t) < \infty,$$

przy czym $\|\cdot\|_\varphi^*$ jest quasi-normą. Przestrzeń ta pojawia się *implicite* w pracach Marcinkiewicza [93, str. 1272] i Calderóna [20, str. 285] oraz *explicit* na przykład u O’Neila, Haaker, Steina i Weissa oraz Sharpleya, a wcześniej u Rutickiego jako zbiór tych $f \in L^0(I)$, dla których $\|f\|_\varphi^d = \sup_{\lambda > 0} \lambda \varphi(d_f(\lambda)) < \infty$, przy czym $d_f(\lambda) = m(\{t \in I : |f(t)| > \lambda\})$. Okazuje się, że $\|f\|_\varphi^* = \|f\|_\varphi^d$ (zob. prace [38, str. 1; 106, str. 148; 128; 134, str. 485; 140, str. 191, ale tylko dla $\varphi(t) = t^{1/p}$]).

Ważna jest też inna (mniejsza) *funkcyjna przestrzeń Marcinkiewicza* M_φ na I wyznaczona przez normę

$$\|f\|_\varphi = \sup_{t \in I} \varphi(t) f^{**}(t), \quad \text{przy czym } f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds.$$

W przypadku, gdy $\varphi(t) = t^{1/p}$, a $p \in (1, \infty)$, zachodzi równość $M_\varphi^* = M_\varphi = L^{p,\infty}$, ale dla $\varphi(t) = t$ otrzymujemy $M_\varphi^* = L^{1,\infty}$ (słabą- L^1 , która jest przestrzenią quasi-Banacha, ale nie jest przestrzenią Banacha, gdyż nierówność trójkąta zachodzi ze stałą 2 i tej stałej nie można poprawić) i $M_\varphi = L^1$.

Oczywiście $M_\varphi \subset M_\varphi^*$ i $\|f\|_\varphi^* \leq \|f\|_\varphi$ dla $f \in M_\varphi$. Funkcyjna przestrzeń Marcinkiewicza M_φ na I jest symetryczną przestrzenią Banacha. Ponadto, jeśli X jest przestrzenią symetryczną, a $\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_X$ dla $t \in I$ jej funkcją fundamentalną, to $X \subset M_\varphi$. Wynika to z faktu, że $\int_0^t f^*(s) ds \leq \frac{t}{\varphi(t)} \|f^* \chi_{[0,t]}\|_X$ dla $f \in X$. Co więcej, M_φ jest największą przestrzenią symetryczną zawierającą X z tą samą funkcją fundamentalną.

Ciągowe przestrzenie Marcinkiewicza m_φ^* i m_φ są zdefiniowane analogicznie przez quasi-normę i normę

$$\|x\|_\varphi^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n) x_n^*, \quad \|x\|_\varphi = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^*,$$

przy czym $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ spełnia warunek $\varphi(k) \leq \max(1, k/n) \varphi(n)$ dla dowolnych $k, n \in \mathbb{N}$ i (x_n^*) jest przestawieniem ciągu $(|x_n|)$ w porządku nierosnącym. Przestrzenie te również są symetrycznymi przestrzeniami ciągowymi.

Funkcyjne i ciągowe przestrzenie (symetryczne) Marcinkiewicza stały się już klasycznymi przestrzeniami, które nadal są obiektem badań. Można o nich przeczytać w pięciu następujących monografiach: [1, 18, 57, 60, 115], a hasło *przestrzeń Marcinkiewicza* znalazło się też w *Encyclopaedia of Mathematics*, gdzie zostało opracowane przez Kreina (zob. artykuł [56]).

7. Co pozostało w literaturze matematycznej z twierdzeń interpolacyjnych polskich matematyków?

W pięćdziesięciolecie 1910–1960 nie zabrakło polskiego wkładu do teorii interpolacji operatorów. Był on udziałem trzech matematyków dobrze znanych na arenie międzynarodowej społeczności matematycznej: Władysława Orlicza, autora ważnych trzech prac z lat 1934, 1954 i twórcy przestrzeni Orlicza, Józefa Marcinkiewicza, który opublikował w 1939 roku niezwykle istotny, choć zaledwie dwustronicowy artykuł, oraz Antoniego Zygmunda, autora dwóch fundamentalnych monografii wydanych w latach 1935 i 1959 oraz wielu prac wydrukowanych w latach 1944, 1948, 1950, 1951 i 1956.

Jednocześnie można stwierdzić, że *twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza* zapisało się na stałe w kanonach analizy, a jako rzecz pochodna – także *przestrzeń Marcinkiewicza*. Natomiast z twierdzenia Orlicza pozostały głównie

5. Zdjęcie u góry: Wilno, 4 III 1936, Józef Marcinkiewicz (po lewej) i Antoni Zygmund.
Zdjęcie na dole: Poznań 1957, Antoni Zygmund i Władysław Orlicz (po prawej)

przestrzenie Orlicza. Ważna jest też monografia Zygmunda z 1959 roku, zawierająca między innymi rezultat Marcinkiewicza, będąca nadal klasyczną pozycją z analizy.

Na zakończenie przytoczę słowa jakich użyłem, opisując sylwetkę i dorobek naukowy Józefa Marcinkiewicza w pracy [85]:

- *Marcinkiewicz był jedną z najwybitniejszych postaci polskiej matematyki i wraz ze Stanisławem Zarembą, Leonem Lichtensteinem, Juliuszem Schauderem i Antonim Zygmundem, najbardziej zasłużonym dla rozwoju analizy klasycznej. Zygmund uważał go za swego najlepszego ucznia, mimo że miał wielu studentów w Polsce i USA.*
- *Dzięki mistrzowi, którym był Zygmund, Marcinkiewicz stał się również znanym matematykiem.*
- *Marcinkiewicz jest obecnie znany głównie dlatego, że Zygmund przetrwał wojnę i mógł opublikować w 1959 roku swoją ważną monografię, zawierającą wiele rezultatów Marcinkiewicza.*

Jako dowód ważności twierdzenia interpolacyjnego Marcinkiewicza może posłużyć fakt cytowania go w klasycznych już dzisiaj książkach z analizy bądź teorii interpolacji. W pracy [85] wymieniłem pięćdziesiąt pięć książek, w których znajdujemy twierdzenie interpolacyjne Marcinkiewicza.

Podziękowania. Dziękuję Karolowi Leśnikowi i Witoldowi Wnukowi (obaj z Poznania) za ulepszenie języka polskiego w tym artykule oraz bibliotece Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu za udostępnienie i zgodę na opublikowanie zdjęcia Marcinkiewicza z Zygmundem. Zdjęcie Orlicza z Zygmundem pochodzi z moich zbiorów prywatnych przekazanych mi przez żonę Orlicza, Zofię, po jego śmierci w 1990 roku.

Bibliografia

- [1] J. Appell, P. P. Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge University Press, Cambridge 1990. [5.2. Lorentz and Marcinkiewicz spaces].
- [2] S. V. Astashkin, L. Maligranda, *Interpolation between L_1 and L_p , $1 < p < \infty$* , Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), nr 10, 2929–2938.
- [3] S. Banach, *Sur les opérations dans ensembles abstraites et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. 3 (1922), 133–181, przedruk w: *Stefan Banach, Oeuvres II*, PWN, Warszawa 1979, 305–348.
- [4] S. Banach, *Teoria Operacji, Tom I. Operacje Liniowe*, Wydawnictwo Kasa im. Mianowskiego Instytutu Popierania Nauki, Warszawa 1931.
- [5] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Monogr. Mat., t. I, Warszawa 1932, przedruk New York, Chelsea 1955; przedruk w: *Stefan Banach, Oeuvres Vol. II*, PWN, Warszawa 1979, 13–219; ang. tłumaczenie: *Theory of Linear Operations*, North-Holland 1987.

- [6] S. Banach, *Die Theorie der Operationen und ihre Bedeutung für die Analysis*, C. R. Congr. Int. Math. 1 (1937), 261–268, przedruk w: Stefan Banach, Oeuvres. Vol. II, PWN, Warsaw, 1979, 434–441.
- [7] J. Bastero, F. J. Ruiz, *Interpolation of operators when the extreme spaces are L^∞* , Studia Math. 104 (1993), nr 2, 133–150.
- [8] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math. (2) 102 (1975), nr 1, 159–182.
- [9] A. I. Benedek, E. R. Murphy, R. Panzone, *Questions of Fourier Analysis. Mean Convergence of Some Orthogonal Series*, Notes on Algebra and Analysis, t. 5, Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca 1976, po hiszpańsku.
- [10] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston 1988. [Part 4.4. The Marcinkiewicz interpolation theorem, str. 216–230].
- [11] C. A. Berenstein, M. Cotlar, N. Kerzman, P. Krée, *Some remarks on the Marcinkiewicz convexity theorem in the upper triangle*, Studia Math. 29 (1967), 79–95.
- [12] Z. W. Birnbaum, W. Orlicz, *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen*, Studia Math. 3 (1931), 1–67, przedruk w: Władysław Orlicz, *Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, 133–199.
- [13] L. Bondesson, J. Grandell, J. Peetre, *The life and work of Olof Thorin (1912–2004)*, Proc. Est. Acad. Sci. 57 (2008), nr 1, 18–25.
- [14] D. W. Boyd, *Indices of function spaces and their relationship to interpolation*, Canad. J. Math. 21 (1969), 1245–1254.
- [15] H. Brézis, W. A. Strauss, *Semi-linear second-order elliptic equations in L^1* , J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 565–590.
- [16] F. E. Browder, *Remarks on nonlinear interpolation in Banach spaces*, J. Funct. Anal. 4 (1969), 390–403.
- [17] Yu. A. Brudnyi, S. G. Krein, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Itogi Nauki i Tekhniki, Mat. Analiz 24 (1986), 3–163, English transl. in J. Soviet Math. 42 (1988), no. 6, 2009–2112 [Theorem of Marcinkiewicz, str. 2017, 2058].
- [18] Yu. A. Brudnyi, N. Ya. Krugljak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces. I*, North Holland, Amsterdam 1991. [Part 1.10. The Marcinkiewicz theorem, str. 66–83; The Marcinkiewicz space $M(\varphi)$, str. 472].
- [19] A. V. Bukhvalov, *Theorems on interpolation of sublinear operators in spaces with mixed norm*, [w:] Qualitative and Approximate Methods for Investigating Operator Equations, Yaroslav. Gos. Univ., Yaroslavl 1984, po rosyjsku.
- [20] A. P. Calderón, *Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz*, Studia Math. 26 (1966), 273–299, przedruk w: *Selected Papers of Alberto P. Calderón With Commentary* (A. Bellow, C. E. Kenig, P. Malliavin, red.), AMS, Providence 2008, 371–397.
- [21] A. P. Calderón, A. Zygmund, *On the theorem of Hausdorff-Young and its applications*, [w:] Contributions to Fourier Analysis, Annals of Math. Studies, t. 25, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1950, 166–188.
- [22] A. P. Calderón, A. Zygmund, *A note on the interpolation of linear operators*, Studia Math. 12 (1951), 194–204.

- [23] A. P. Calderón, A. Zygmund, *A note on the interpolation of sublinear operations*, Amer. J. Math. 78 (1956), 282–288.
- [24] A. Cianchi, *An optimal interpolation theorem of Marcinkiewicz type in Orlicz spaces*, J. Funct. Anal. 153 (1998), nr 2, 357–381.
- [25] M. Cotlar, *A general interpolation theorem for linear operations*, Rev. Mat. Cuyana 1 (1955), 57–84 (1956).
- [26] M. Cotlar, M. Bruschi, *On the convexity theorems of Riesz–Thorin and Marcinkiewicz*, Univ. Nac. La Plata. Publ. Fac. Ci. Fisicomat. Serie Segunda. Rev. 5 (1956), 162–172 (1957), po hiszpańsku.
- [27] M. G. Crandall, L. Tartar, *Some relations between nonexpansive and order preserving mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 78 (1980), nr 3, 385–390.
- [28] M. Cwikel, *A counterexample in nonlinear interpolation*, Proc. Amer. Math. Soc. 62 (1977), nr 1, 62–66.
- [29] V. I. Dmitriev, S. G. Kreĭn, *Interpolation of operators of weak type*, Anal. Math. 4 (1978), nr 2, 83–99.
- [30] N. Dunford, B. J. Pettis, *Linear operations among summable functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25 (1939), 544–550.
- [31] N. Dunford, B. J. Pettis, *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 47 (1940), 323–392.
- [32] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators. Part I. General Theory*, Interscience, New York–London 1958.
- [33] W. Fenchel, *On conjugate convex functions*, Canad. J. Math. 1 (1949), 73–77.
- [34] D. Gallardo, *Orlicz spaces for which the Hardy–Littlewood maximal operator is bounded*, Publ. Mat. 32 (1988), nr 2, 261–266.
- [35] A. M. Garsia, *Topics in Almost Everywhere Convergence*, Markham, Chicago 1970. [Marcinkiewicz interpolation theorem, str. 124–128].
- [36] J. Gasch, L. Maligranda, *On vector-valued inequalities of the Marcinkiewicz–Zygmund, Herz and Krivine type*, Math. Nachr. 167 (1994), 95–129.
- [37] L. Grafakos, N. Kalton, *Some remarks on multilinear maps and interpolation*, Math. Ann. 319 (2001), nr 1, 151–180.
- [38] A. Haaker, *On the conjugate space of the Lorentz space, technical report*, Department of Mathematics, Lund University, Lund 1970, reprinted: A. Sparr, *On the conjugate space of the Lorentz space $L(\Phi, q)$* , in: *Interpolation Theory and Applications*, Contemp. Math. 445, Amer. Math. Soc., Providence 2007, 313–336 (jest to licencjat Anniki Haaker pod kierunkiem Jaaka Peetre. Nazwisko Haaker to jej nazwisko panińskie, a wyszła za mąż za Gunnara Sparra).
- [39] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press 1934.
- [40] H. P. Heinig, L. Maligranda, *Interpolation with weights in Orlicz spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 8 (1994), nr 1, 37–55.
- [41] O. Hölder, *Über einen Mittelwertssatz*, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Klasse (1889), 38–47.

- [42] J. Horváth, *Encounters with Mischa Cotlar*, Notices Amer. Math. Soc. 56 (2009), nr 5, 616–620.
- [43] H. Hudzik, L. Maligranda, *Amemiya norm equals Orlicz norm in general*, Indag. Math. (N.S.) 11 (2000), nr 4, 573–585.
- [44] R. A. Hunt, *An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 803–807.
- [45] S. Igari, *An extension of the interpolation theorem of Marcinkiewicz*, Proc. Japan Acad. 38 (1962), 731–734.
- [46] S. Igari, *An extension of the interpolation theorem of Marcinkiewicz. II*, Tohoku Math. J. (2) 15 (1963), 343–358.
- [47] C. A. Infanzog, *An introduction to relations among inequalities*. Amer. Math. Soc. Meeting 700 Cleveland, Ohio 1972, Notices Amer. Math. Soc. 14 (1972), A819–A820.
- [48] S. Janson, *On the interpolation of sublinear operators*, Studia Math. 75 (1982), nr 1, 51–53.
- [49] S. Janson, *On interpolation of multilinear operators*, [w:] Function Spaces and Applications (Lund, 1986), Lecture Notes in Math., t. 1302, Springer, Berlin 1988, 290–302.
- [50] S. Kaczmarz, L. Nikliborc, *Sur les suites de fonctions convergentes en moyenne*, Fund. Math. 11 (1928), 151–168.
- [51] J.-P. Kahane, *Review of the book “Trigonometric Series”, Vols. I, II, by Antoni Zygmund, third edition, Cambridge University Press 2002*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 41 (2004), nr 3, 377–390.
- [52] V. M. Kaplinskiĭ, *Interpolation of nonlinear operators in weighted L_p -spaces*, Sibirsk. Math. Zh. 51 (2010), nr 2, 316–329, po rosyjsku; English transl. in Siberian Math. J. 51 (2010), no. 2, 255–266.
- [53] S. Koizumi, *Contributions to the theory of interpolation of operations*, Osaka J. Math. 8 (1971), 135–149.
- [54] M. A. Krasnoselskii, Ya. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, GITL, Moskwa 1958, po rosyjsku; angielskie tłumaczenie Noordhoff, Groningen 1961.
- [55] P. Krée, *Interpolation d’espaces vectoriels qui ne sont ni normés, ni complets. Applications*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 17 (1967), nr 2, 137–174 (1968).
- [56] S. G. Krein, *Marcinkiewicz space*, [w:] Encyclopaedia of Mathematics, t. 10, Kluwer, Dodrecht 1990, 93–94.
- [57] S. G. Krein, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Amer. Math. Soc., Providence 1982. [Chapter II, Part 5, str. 107: Lorentz and Marcinkiewicz spaces, str. 112–118; Part 6.2. Operators from Lorentz spaces to Marcinkiewicz spaces, str. 127–130]; wersja rosyjska, Nauka, Moskwa 1978.
- [58] U. Krengel, M. Lin, *Order preserving nonexpansive operators in L_1* , Israel J. Math. 58 (1987), nr 2, 170–192.
- [59] J. L. Krivine, *Sur la complexification des opérateurs de L^∞ dans L^1* , C. R. Acad. Sci. Paris 284 (1977), 377–379.

- [60] A. Kufner, O. John, S. Fučík, *Function Spaces*, Academia, Prague 1977. [Marcinkiewicz's theorem, str. 106; Marcinkiewicz spaces and their connection with the spaces $L_p^w(\Omega)$, str. 209–212].
- [61] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces, II. Function Spaces*, Springer Verlag, New York–Berlin 1979. [Theorem 2.b15. The Marcinkiewicz interpolation theorem, str. 149–150].
- [62] J.-L. Lions, *Some remarks on variational inequalities*, [w:] Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokio 1969), Univ. of Tokyo Press, Tokyo 1970, 269–282.
- [63] J.-L. Lions, J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 19 (1964), 5–68.
- [64] J. E. Littlewood, *A mathematician's miscellany*, Methuen, London 1953.
- [65] J. E. Littlewood, *Littlewood's miscellany*, wyd. poprawione (B. Bollobás, red.), Cambridge University Press, Cambridge 1986.
- [66] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, University of Toronto Press, Toronto 1953.
- [67] G. G. Lorentz, T. Shimogaki, *Interpolation theorems for operators in function spaces*, J. Funct. Anal. 2 (1968), 31–51.
- [68] G. G. Lorentz, T. Shimogaki, *Majorants for interpolation theorems*, Publ. Ramanujan Inst. 1 (1969), 115–122.
- [69] G. G. Lorentz, T. Shimogaki, *Interpolation theorems for the pairs of spaces (L^p, L^∞) and (L^1, L^q)* , Trans. Amer. Math. Soc. 159 (1971), 207–221.
- [70] L. Maligranda, *The Riesz–Thorin theorem for Lipschitz operators*, [w:] V Session of Functional Analysis, Poznań 25, abstrakt w Funct. Approx. Comment. Math. 9 (1980), 146.
- [71] L. Maligranda, *Interpolacja pewnych operatorów nieliniowych w przestrzeniach Banacha*, doktorat UAM, Poznań 1979, iii+169 stron, promotor – W. Orlicz.
- [72] L. Maligranda, *Interpolation of Lipschitz operators for the pairs of spaces (L^1, L^∞) and (l^1, c_0)* , Comment. Math. Prace Mat. 21 (1980), nr 2, 327–339.
- [73] L. Maligranda, *Interpolation of Lipschitz operators for the pairs of spaces (L^p, L^∞) and (l^p, c_0) , $0 < p < \infty$* , Funct. Approx. Comment. Math. 9 (1980), 107–115.
- [74] L. Maligranda, *A generalization of the Shimogaki theorem*, Studia Math. 71 (1981), nr 1, 69–83.
- [75] L. Maligranda, *Commentary to Banach's 87 problem from the Scottish Book*, [w:] The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café (D. Mauldin, red.), Birkhäuser 1981, 161–170.
- [76] L. Maligranda, *Interpolation of locally Hölder operators*, Studia Math. 78 (1984), nr 3, 289–296.
- [77] L. Maligranda, *Indices and interpolation*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 234 (1985), 1–54. [Chapter 6, Part B, Marcinkiewicz interpolation theorem in Orlicz spaces].
- [78] L. Maligranda, *Some remarks on Orlicz's interpolation theorem*, Studia Math. 95 (1989), nr 1, 43–58.

- [79] L. Maligranda, *On interpolation of nonlinear operators*, Comment. Math. Prace Mat. 28 (1989), nr 2, 253–275.
- [80] L. Maligranda, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminars in Math., t. 5, Univ. of Campinas, Campinas SP, Brazil 1989.
- [81] L. Maligranda, *On Orlicz results in interpolation theory*, [w:] Proc. Orlicz Mem. Conf., Exp. no 5, Oxford, MS 1991, 1–12.
- [82] L. Maligranda, *The Scottish Book – some problems and their influence on modern research in mathematics and applications*, Luleå University of Technology, Luleå 1991, wykład habilitacyjny 4 września 1991 (wydruk 29 stron).
- [83] L. Maligranda, *Why Hölder's inequality should be called Rogers' inequality*, Math. Inequal. Appl. 1 (1998), 69–83.
- [84] L. Maligranda, *Equivalence of the Hölder-Rogers and Minkowski inequalities*, Math. Inequal. Appl. 4 (2001), 203–207.
- [85] L. Maligranda, *Józef Marcinkiewicz (1910–1940) – on the centenary of his birth*, Banach Center Publ. 95 (2011), 133–234.
- [86] L. Maligranda, *Hidegoro Nakano (1909–1974) – on the centenary of his birth*, [w:] Banach and Function Spaces III, Proc. of the Third Internat. Symp. on Banach and Function Spaces (ISBFS 2009), 14–17 września 2009 roku, Kitakyushu (M. Kato, L. Maligranda, T. Suzuki, red.), Yokohama Publishers 2011, 99–171.
- [87] L. Maligranda, *Marcinkiewicz interpolation theorem and Marcinkiewicz spaces*, Wiad. Mat. 48 (2012), nr 2, 157–171.
- [88] L. Maligranda, *Recenzja książki Albrechta Pietscha History of Banach Spaces and Linear Operators*, Wiad. Mat. 48 (2012), nr 1, 158–165.
- [89] L. Maligranda, N. Sabourova, *On Clarkson's inequality in the real case*, Math. Nachr. 280 (2007), nr 12, 1363–1375.
- [90] L. Maligranda, N. Sabourova, *Real and complex operator norms between quasi-Banach L^p – L^q spaces*, Math. Inequal. Appl. 14 (2011), nr 2, 247–270.
- [91] L. Maligranda, W. Wnuk, *Władysław Orlicz (1903–1990)*, Wiad. Mat. 36 (2000), 85–147.
- [92] S. Mandelbrojt, *Sur les fonctions convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris 209 (1939), 977–978.
- [93] J. Marcinkiewicz, *Sur l'interpolation d'opérations*, C. R. Acad. Sci. Paris 208 (1939), 1272–1273, przedruk w: *Józef Marcinkiewicz, Collected Papers*, Edited by Antoni Zygmund, PWN, Warszawa 1964, 539–540.
- [94] J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, *Quelques inégalités pour les opérations linéaires*, Fund. Math. 32 (1939), 115–121, przedruk w: *Józef Marcinkiewicz, Collected Papers*, Edited by Antoni Zygmund, PWN, Warszawa 1964, 541–546.
- [95] W. Matuszewska, W. Orlicz, *On certain properties of φ -functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), 439–443, przedruk w: *Władysław Orlicz, Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, 1112–1116.
- [96] V. Maz'ya, *Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations*, drugie zmienione, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg 2011.

- [97] E. J. McShane, *Integration*, Princeton University Press VIII 1944.
- [98] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen, I*, B. G. Teubner, Leipzig 1896.
- [99] B. S. Mitjagin, *An interpolation theorem for modular spaces*, Mat. Sb. (N.S.) 66 (1965), 473–482, po rosyjsku; angielska wersja w Lecture Notes in Math. 1070, Springer, Berlin 1984, 10–23.
- [100] T. Miyamoto, *On some interpolation theorems of quasi-linear operators*, Math. Japon. 42 (1995), nr 3, 545–556.
- [101] M. Morse, W. Transue, *Functionals F bilinear over the product $A \times B$ of two pseudo-normed vector spaces. II. Admissible spaces A* , Ann. of Math. 51 (1950), 576–614.
- [102] E. M. Nikishin, *Resonance theorems and superlinear operators*, Uspehi Mat. Nauk 25 (1970), nr 6, 129–191, ang. tłum. w Uspehi Mat. Nauk 25 (1970), no. 6, 125–187.
- [103] O. M. Nikodym, *Contribution à la théorie des fonctionnelles linéaires en connexion avec la théorie de la mesure des ensembles abstraits*, Mathematica (Cluj) 5 (1931), 130–141.
- [104] E. T. Oklander, *Interpolación, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewicz*, Cursos y Seminarios de Matemática, t. 20, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires 1965.
- [105] R. O’Neil, *Two elementary theorems on the interpolation of linear operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 76–82.
- [106] R. O’Neil, *Integral transforms and tensor products on Orlicz and $L(p, q)$ -spaces*, J. Analyse Math. Soc. 21 (1968), 1–276.
- [107] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B* , Bull. de l’Acad. Polonaise Sci., Sér. A: Sci. Math. 8/9 (1932), 207–220, przedruk w: Władysław Orlicz, *Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, 217–230.
- [108] W. Orlicz, *Ein Satz über die Erweiterung von linearen Operationen*, Studia Math. 5 (1934), 127–140, przedruk w: Władysław Orlicz, *Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, 309–322.
- [109] W. Orlicz, *Über Räume (L^M)* , Bull. de l’Acad. Polonaise Sci., Sér. A: Sci. Math. 8/9 (1936), 93–107, przedruk w: Władysław Orlicz, *Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, 345–359.
- [110] W. Orlicz, *On a class of operations over the space of continuous vector valued functions*, Studia Math. 14 (1954), 285–297, przedruk w: Władysław Orlicz, *Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, 793–805.
- [111] W. Orlicz, *On a class of operations over the space of integrable functions*, Studia Math. 14 (1954), 302–309, przedruk w: Władysław Orlicz, *Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, 806–813.
- [112] W. Orlicz, *A note on modular spaces. I*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 9 (1961), 157–162, przedruk w: Władysław Orlicz, *Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, 1142–1147.
- [113] J. Peetre, *Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces*, Mathematica (Cluj) 12 (1970), 325–334.

- [114] J. Peetre, *On the development of interpolation—instead of a history three letters*, [w:] *Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics* (Lund, 2000), de Gruyter, Berlin 2002, 39–48.
- [115] Ju. I. Petunin, A. N. Pličko, *The Theory of the Characteristics of Subspaces and its Applications*, Vishcha Shkola, Kiev 1980, po rosyjsku [Marcinkiewicz spaces, str. 101–103 i 111–112].
- [116] A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser, Boston 2007. [The Marcinkiewicz interpolation theorem (1939), str. 433].
- [117] A. Rajchman, *Sur l'inégalité Hausdorff-Riesz*, *Fund. Math.* 24 (1935), 288–297.
- [118] M. M. Rao, Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York 1991. [Marcinkiewicz interpolation, str. 247–252].
- [119] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, *Math. Ann.* 69 (1910), 449–497, przedruk w: *Frigyes Riesz, Oeuvres Complètes*, Vol. I, Akadémiai Kiadó, Budapest 1960, 441–489.
- [120] F. Riesz, *Les Systèmes D'Équations Linéaires à une Infinite D'Inconnues*, Gauthier-Villars, Paris 1913, przedruk w: *Frigyes Riesz, Oeuvres Complètes*, Vol. I, Akadémiai Kiadó, Budapest 1960, 829–1016.
- [121] F. Riesz, *Su alcune disuguaglianze*, *Boll. Un. Mat. Ital.* 7 (1928), 77–79, przedruk w: *Frigyes Riesz, Oeuvres Complètes*, Vol. I, Akadémiai Kiadó, Budapest 1960, 519–521.
- [122] M. Riesz, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires*, *Acta Math.* 49 (1926), 465–497.
- [123] W. J. Riordan, *On the interpolation of operators*, rozprawa doktorska, The University of Chicago, Chicago 1955.
- [124] N. M. Rivière, *Interpolation á la Marcinkiewicz*, *Rev. Un. Mat. Argentina* 25 (1970/71), 363–377.
- [125] L. J. Rogers, *An extension of a certain theorem in inequalities*, *Messenger of Math.* 17 (1888), 145–150.
- [126] H. L. Royden, *Real Analysis*, 3rd wyd., Macmillan, New York 1988.
- [127] G. I. Russu, *Symmetric spaces of functions that do not have the majorization property*, *Mat. Issled.* 4 (1969), nr 4 (14), 82–93, po rosyjsku.
- [128] Ya. B. Rutickii, *Classes of measurable functions*, *Uspehi Mat. Nauk* 20 (1965), nr 4, 205–208, po rosyjsku.
- [129] R. Ryan, *Conjugate functions in Orlicz spaces*, *Pacific J. Math.* 13 (1963), 1371–1377.
- [130] R. Salem, *Review of the book "Trigonometric series" by A. Zygmund*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 66 (1960), nr 1, 6–12.
- [131] R. Salem, A. Zygmund, *A convexity theorem*, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 34 (1948), 443–447.
- [132] W. L. C. Sargent, *Some analogues and extensions of Marcinkiewicz's interpolation theorem*, *Proc. London Math. Soc.* (3) 1 (1961), 457–468.
- [133] E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators in spaces of functions with given modulus of continuity*, [w:] *Thesis of 7th Far East Math. Confer.*, Khabarovsk 1968, 33–34, po rosyjsku.

- [134] R. Sharpley, *Spaces $\Lambda_\alpha(X)$ and interpolation*, J. Functional Analysis 11 (1972), 479–513.
- [135] R. Sharpley, *Multilinear weak type interpolation of m n -tuples with applications*, Studia Math. 60 (1977), nr 2, 179–194.
- [136] T. Shimogaki, *An interpolation theorem on Banach function spaces*, Studia Math. 31 (1968), 233–240.
- [137] I. V. Shragin, *The Amemiya norm in an Orlicz–Nakano space*, Kishinev. Gos. Univ. Uchen. Zap. 91 (1967), 91–102, po rosyjsku.
- [138] I. B. Simonenko, *Interpolation and extrapolation of linear operators in Orlicz spaces*, Mat. Sb. (N.S.) 63 (1964), 536–553, po rosyjsku.
- [139] E. M. Stein, G. Weiss, *An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications*, J. Math. Mech. 8 (1959), 263–284.
- [140] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton 1971. [V.2. Marcinkiewicz interpolation theorem, str. 183–200].
- [141] H. Steinhaus, *Additive und stetige Funktionaloperationen*, Math. Zeit. 5 (1919), 186–221, przedruk w: *Hugo Steinhaus Selected Papers*, PWN, Warszawa 1985, 252–288.
- [142] R. S. Strichartz, *A multilinear version of the Marcinkiewicz interpolation theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 441–444.
- [143] J.-O. Strömberg, *Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy spaces*, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), nr 3, 511–544.
- [144] J. D. Tamarkin, A. Zygmund, *Proof of a theorem of Thorin*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 279–282.
- [145] L. Tartar, *Interpolation non linéaire et régularité*, J. Funct. Anal. 9 (1972), 469–489.
- [146] G. O. Thorin, *An extension of a convexity theorem due to M. Riesz*, Kungl. Fysio-grafiska Sällskapet i Lund Förhandlingar 8 (1939), No. 14 (= Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. 4 (1939), 1–5).
- [147] G. O. Thorin, *Convexity theorems*, thesis, University of Lund, (= Medd. Lunds Mat. Sem. 9 (1948), 1–58), Uppsala 1948, 1–58.
- [148] A. Torchinsky, *Interpolation of operations and Orlicz classes*, Studia Math. 59 (1976), nr 2, 177–207.
- [149] N. Wiener, *Note on a paper of M. Banach*, Fund. Math. 4 (1923), 136–143.
- [150] W. A. Woyczyński, *Szukając Birnbauma*, Wiadom. Mat. 33 (1997), 137–154, ang. tłum. *Seeking Birnbaum, or nine lives of a mathematician*, Math. Intelligencer 23 (2001), no. 2, 36–46.
- [151] A. C. Zaanan, *Linear Analysis*, Interscience, New York 1953.
- [152] M. Zafran, *A multilinear interpolation theorem*, Studia Math. 6 (1978), nr 2, 107–124.
- [153] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Monografie Matematyczne, t. 5, Warszawa-Lwów 1935. [Twierdzenia M. Riesz o wypukłości i zastosowania, str. 192–211].

- [154] A. Zygmund, *On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations*, J. Math. Pures Appl. (9) 35 (1956), 223–248.
- [155] A. Zygmund, *Trigonometric Series, Vol. I, II.*, 2nd wyd., Cambridge University Press, New York 1959. [Chapter XII, Part 4. Marcinkiewicz's theorem on the interpolation of operators, str. 111–120].
- [156] A. Zygmund, *Trigonometricheskie Ryady. Tomy I, II*, Izdat. Mir, Moscow 1965.

Lech Maligranda
Department of Engineering Sciences and Mathematics
Luleå University of Technology
lech.maligranda@ltu.se